Vzorové riešenia MatX 2017

matx.p-mat.sk

15. februára 2017

Úloha 1

Matilda robila medzi spolužiakmi experiment. Na otázku: „Aký obvod má obdĺžnik, ktorý má obsah 210 cm^2 a dĺžky jeho strán sú celé čísla?" dostala 7 rôznych odpovedí. Mohli byť všetky správne?

Riešenie 1

Vypíšme si rozmery všetkých možných obdĺžnikov, ktoré spĺňajú Matildinu podmienku: 1 × 210, 2 × 105, 3 × 70, 5 × 42, 6 × 35, 7 × 30, 10 × 21, 14 × 15. Je ich osem. Ľahko si overíme, že majú rôzne obvody. Tým pádom mohlo byť dokonca všetkých týchto osem čísel správnou odpoveďou na Matildinu otázku, takže všetkých sedem odpovedí, ktoré Matilda dostala, mohlo byť správnych.

Úloha 2

Máme nasledovnú postupnosť čísel:
1, 2, 3, 4, 5,
7, 9, 11, 13, 15,
18, 21, 24, ...
Aký bude 80. člen tejto postupnosti?

Riešenie 2

Na konci prvého riadku postupnosti je číslo 5, čo je 5. číslo postupnosti. Na konci druhého riadku je číslo 15, čo je 10. číslo postupnosti. Na konci tretieho riadku je číslo 30, čo je 15. číslo postupnosti. Takže 80. číslo postupnosti bude na konci 80 / 5 = 16. riadku postupnosti. Tiež vidíme, že posledné číslo v riadku číslo n je vždy o 5 × n väčšie, než posledné číslo v predošlom riadku. To preto, že toto posledné číslo v riadku dostaneme tak, že päťkrát pričítame číslo riadku k poslednému číslu v predchádzajúcom riadku. Tým pádom posledné číslo v 16. riadku (teda 80. číslo postupnosti) bude 5 + 10 + 15 + 20 + 25 + 30 + 35 + 40 + 45 + 50 + 55 + 60 + 65 + 70 + 75 + 80 = 680.

Úloha 3

Viacciferné číslo voláme optimistické, ak jeho číslice zľava doprava rastú. Ak číslice zľava doprava klesajú, číslo voláme pesimistické. Máme pesimistické číslo P a optimistické číslo Q. Čísla P a Q majú rovnaké cifry. Súčet P a Q je 109900, rozdiel P a Q je 84942. Aké je pesimistické číslo P?

Riešenie 3

Čísla P a Q musia byť päťciferné. To preto, že ich súčet je šesťciferný a začína jednotkou – keby P a Q boli obe štvorciferné, ich súčet by bol maximálne päťciferný. Keby obe čísla boli šesťciferné, tak by ich šesťciferný súčet začínal aspoň dvojkou.

P a Q sú teda obe päťciferné a vieme, že majú rovnaké cifry. Vďaka vlastnostiam optimistických a pesimistických čísel z tohto vyplýva, že P je Q napísané odzadu. Nech Q = abcde, potom P = edcba a platí a < b < c < d < e. Využime Q + P = 109900 = abcde + edcba. Vidíme, že a + e = 10, pretože posledná cifra P + Q je nula. Máme teda štyri možnosti: a = 1, e = 9; a = 2, e = 8; a = 3, e = 7; a = 4, e = 6. Ďalšie určite nevyhovujú, pretože a musí byť menšie než e. Z rozdielu P a Q rovno vieme, že e - a = 8, teda a = 1, e = 9. Ďalej vieme, že b + d + 1 = 10, pretože predposledná cifra P + Q je 0 a pri sčítavaní a + e nám jednotka ostala. Sú teda tri možnosti: b = 2, d = 7; b = 3, d = 6; b = 4; d = 5. Z rozdielu P - Q opäť vieme, že b – d + 1 = –4, čo spĺňa b = 2, d = 7. Takže už máme P = 97c21. Zo súčtu P + Q už ľahko zistíme, že c = 4, teda P = 97421.

Úloha 4

Jedného dňa spozoroval hasič z okna požiarnej zbrojnice kúdoly dymu valiace sa spoza hory. Nevedel však presne, kde horí, lebo za horou sú tri obce: Pravdice (ktorých obyvatelia hovoria vždy pravdu), Klamáre (ktorých obyvatelia vždy klamú) a Striedavá Lehota (ktorej obyvatelia hovoria striedavo: prvú vetu pravdivo, druhú klamú, tretiu pravdivo atď.). Než sa hasič spamätal, už aj drnčí telefón: „Príďte rýchlo, horí u nás!“ „Kde?“ pýta sa hasič. „V Striedavej Lehote!“ odpovedá vzrušený hlas. Do ktorej z troch obcí majú hasiči vyraziť?

Riešenie 4

Najskôr zistíme, kto volal. Nemohol to byť obyvateľ Pravdíc, pretože potom by jeho druhá veta musela byť nepravdivá. Keby to bol človek zo Striedavej Lehoty, tak by z jeho prvej vety vyplývalo, že horí v Striedavej Lehote, ale jeho druhá veta by potom bola tiež pravdivá, čo u človeka zo Striedavej Lehoty nie je možné. Z toho vyplýva, že musel volať človek z Klamár.

Z prvej vety vieme, že nehorí v Klamároch, pretože musí byť nepravdivá. Z druhej vety vieme, že nehorí v Striedavej Lehote, pretože tiež musí byť nepravdivá. Horí teda v Pravdiciach.

Úloha 5

Naša trieda si plánovala po súťaži MatX spraviť turistický výlet. Niektorí žiaci sa dohadovali o dĺžke jeho trasy a tvrdili, že je to 16, 28, 32, 37 a 15 km. Mýlili sa však o 5, 7, 8, 9 a 14 km. Aký dlhý bol výlet v skutočnosti?

Riešenie 5

Pozrime sa na najmenšie a najväčšie vyslovené odhady dĺžky trasy: 15 km a 37 km. Človek, ktorý povedal 15 km určite povedal menej, než bola trasa dlhá v skutočnosti. Naopak človek, ktorý povedal 37 km, povedal nutne viac, než bola trasa dlhá v skutočnosti. Koľko teda mohla byť dĺžka trasy? Skutočná dĺžka trasy musela byť jedno z čísel 15 + 5 = 20, 15 + 7 = 22, 15 + 8 = 23, 15 + 9 = 24 a 15 + 14 = 29. Zároveň však musela byť jedným z čísel 37 – 5 = 32, 37 – 7 = 30, 37 – 8 = 29, 37 – 9 = 28, 37 – 14 = 23. Jediné číslo, ktoré sa zhoduje v oboch prípadoch je 23. Skúsme teda, či zvyšné chyby napasujeme na zostávajúce tri odhady. Jednoduchým skúšaním dostávame: 16 + 7 = 23, 28 – 5 = 23, 32 – 9 = 23. Výsledok je teda 23 km.

Úloha 6

Pat napísal na tabuľu príklad s chybou: 550 + 461 + 359 + 341 = 2017. Mat to chcel opraviť, preto pátral po neznámom čísle, ktoré by pripočítal ku každému z piatich uvedených čísel, aby bol príklad potom vypočítaný správne. Aké bolo toto neznáme číslo?

Riešenie 6

Súčet na ľavej strane je 550 + 461 + 359 + 341 = 1711. Ak pričítame ku každému z týchto čísel číslo x, zväčší sa tento súčet o 4x. Naopak na pravej strane pôvodnej rovnice je číslo 2017. Ak pričítame k tomuto číslu číslo x, zväčší sa hodnota pravej strany rovnice o x. Hľadáme teda x, pre ktoré platí: 1711 + 4x =

$2017 + x$. Toto upravíme na $4x = 306 + x$ a dostávame $3x = 306$, teda $x = 102$. Ku každému z čísel teda musíme pričítať 102.

Úloha 7

Na stenách kocky sú napísané číslice od 1 po 6, každá práve raz. Na každej stene je napísaná práve jedna číslica. Keď sa pozriem z troch rôznych pohľadov, tak zbadám vždy inú trojicu stien. Súčty týchto trojíc sú 9, 9 a 13. Ktoré číslo je na kocke oproti číslu 2?

Riešenie 7

Máme k dispozícii čísla 1, 2, 3, 4, 5, 6. Existujú len 2 rôzne trojice, ktoré dávajú súčet 13: $2 + 5 + 6$ a $3 + 4 + 6$. Taktiež existujú len tri rôzne trojice, ktoré dávajú súčet 9: $1 + 2 + 6$, $1 + 3 + 5$, $2 + 3 + 4$. Napíšme si teraz na prázdnu kocku číslo 2. Postupným systematickým skúšaním možností čísel, ktoré môžu byť oproti stene s číslom 2, a použitím trojíc zmienených vyššie sa dostaneme k tomu, že oproti dvojke môžu byť len jednotka alebo trojka. Napríklad takto: 1–4, 2–3, 5–6, alebo 1–2, 3–6, 4–5 (dvojice čísel s pomlčkou sú na stenách oproti sebe).

Úloha 8

Terka si nakreslila úsečku AB a umiestnila na ňu bod C. Potom nakreslila ešte bod D tak, aby mali úsečky AD, CD aj BC všetky rovnakú dĺžku a uhly ADC a CDB rovnakú veľkosť. Akú veľkosť mal uhol BAD?

Riešenie 8

Keďže strany BC a BD sú rovnako dlhé, trojuholník BCD je rovnoramenný. Takže uhly CDB a DBC majú rovnakú veľkosť, povedzme x. Veľkosť uhla BCD je potom $180 – 2x$ zo súčtu uhlov v trojuholníku BCD a veľkosť uhla DCA je $180 – (180 – 2x) = 2x$ pretože súčet veľkostí uhlov BCD a DCA musí byť 180. Zo zadania vieme, že uhly CDB a CDA sú rovnaké, takže uhol CDA má veľkosť x. Zo súčtu uhlov v trojuholníku CAD tým pádom vyplýva, že veľkosť uhla CAD je $180 – 3x$. Keďže strany CD a AD sú rovnako dlhé, trojuholník CAD je rovnoramenný a uhly CAD a DCA sú rovnaké. Takže $180 – 3x = x$. Riešením tejto rovnice je jediné $x = 32$ a keďže $2x = DCA = CAD = BAD$, dostávame, že uhol BAD má 72 stupňov.

Úloha 9

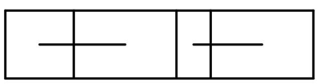
Pre ktoré päťciferné číslo x platí, že ak pred x dopíšeme jednotku, dostaneme číslo trikrát menšie, než keby sme dopísali jednotku za číslo x?

Riešenie 9

Keď pred číslo x dopíšeme jednotku, dostaneme číslo $100000 + x$. Keď za číslo x dopíšeme jednotku, dostaneme číslo $10x + 1$. Zo zadania je číslo $100000 + x$ trikrát menšie než $10x + 1$, teda $3(x + 100000) = 10x + 1$. Riešením tejto rovnice je 42857 a môžeme si overiť, že $3 \times 142857 = 425871$.

Úloha 10

Matej rozdelil prúžok papiera dĺžky 42 cm na štyri rôzne obdĺžniky. Potom spojil stredy obdĺžnikov dvojicou úsečiek tak, ako je to znázornené na obrázku. Aký je súčet dĺžok týchto dvoch úsečiek v centimetroch?



Riešenie 10

V každom zo štyroch obdĺžnikov je úsečka polovičnej dĺžky než je strana daného obdĺžnika. Takže celková dĺžka nakreslených úsečiek je polovicou súčtu dĺžok strán všetkých štyroch obdĺžnikov. Tento súčet je 42 cm, keďže pôvodný pásik papiera mal dĺžku 42 cm. Takže celková dĺžka nakreslených úsečiek je 42 / 2 = 21 cm.

Úloha 11

Máme dvojciferné číslo, pre ktorého cifry platí, že ak ich súčin a súčet sčítame, dostaneme opäť pôvodné číslo. Akú cifru má toto číslo na mieste jednotiek?

Riešenie 11

Zapíšme si číslo s touto vlastnosťou ako 10a + b, kde a je prvá cifra a b druhá cifra daného čísla. Zo zadania vyplýva, že a + b + ab = 10a + b. Zjednodušením tejto rovnice dostaneme ab = 9a. Cifra a nikdy nemôže byť nula, keďže číslo 10a + b je dvojciferné, takže z rovnice vyplýva že b = 9, teda že druhá cifra čísla s hľadanou vlastnosťou je 9.

Úloha 12

V krabici je 10 bielych, 8 červených a 11 čiernych guľôčok. Koľko najmenej ich musíme vytiahnuť (ťaháme poslepiačky), aby sme mali istotu, že medzi vytiahnutými budú z každej farby aspoň dve?

Riešenie 12

Najväčší možný počet guľôčok, pri ktorom ešte nie je splnená podmienka zo zadania, je taký, keď máme z dvoch farieb všetky guľôčky a z tretej farby len jednu guľôčku. Aký je tento počet v tomto prípade? Môžu to byť 10 + 8 + 1 = 19, alebo 10 + 11 + 1 = 22, alebo 11 + 8 + 1 = 20. Vidíme, že najviac je 22. Pokiaľ by sme teda mali maximálnu smolu a vytiahli si 10 bielych, 11 čiernych a 1 červenú guľôčku, podmienka zo zadania by ešte stále nebola splnená. Pridaním 1 guľôčky však už určite splnená je i v tomto prípade a teda odpoveď je 23.

Úloha 13

Adam a Bedřich si spravili výlet do mesta Odmocnina nad Kvadrátom. Jeden z nich šiel na bicykli a jeden autom (auto bolo rýchlejšie ako bicykel). Vyrazili naraz. V istom okamihu nastala táto situácia: Keby Adam doteraz prešiel dvakrát menej, zostávalo by mu prejsť trikrát viac a keby Bedřich doteraz prešiel dvakrát viac, zostávalo by mu prejsť trikrát menej. Kto z nich išiel na bicykli?

Riešenie 13

Bez ujmy na všeobecnosti predpokladajme, že celková dĺžka trasy, ktorú Adam aj Bedřich musia prejsť je 1 km. Označme si ako x dĺžku cesty, ktorá zostáva Adamovi v momente, ktorý sa spomína v zadaní. Nech tento moment je prítomnosťou. Keby bol Adam prešiel doteraz dvakrát menej, bol by prešiel (1 – x) / 2. Zo zadania vieme, že by mu chýbalo trikrát viac, než mu chýba teraz, takže chýbalo by mu 3x. Teda doteraz by bol prešiel 1 – 3x. Takže 1 – 3x = (1 – x) / 2, z čoho vyplýva, že x = 1/5. Adamovi teda ostáva 1/5 celkovej trate.

Podobnou úvahou dospejeme k tomu, že Bedřichovi zostávajú 3/5 celkovej trate. Takže Adam doteraz prešiel viac než Bedřich a na bicykli tým pádom musel ísť Bedřich.

Úloha 14

Keď sa pozajtrajšok stane včerajškom, tak dnes bude tak ďaleko od nedele ako deň, ktorý bol dneškom, keď predvčerajšok bol zajtrajškom. Ktorý deň je dnes?

Riešenie 14

Keď sa pozajtra stane včerajškom, bude deň, ktorý môžeme nazvať popozajtrajškom. Keď predvčerom bolo zajtra, bol deň, ktorý môžeme nazvať predpredvčerajškom. Podľa zadania tieto dni majú byť rovnako vzdialené od nedele. Keď sa pozrieme na schému PPV–PV–V–D–Z–PZ–PPZ, vidíme, že dni PPV a PPZ sú od seba vzdialené 6 dní. Teda jediný deň, od ktorého sú rovnako vzdialené je D. Tento deň má byť nedeľa z čoho vyplýva, že D = dnes = nedeľa. Pri inom pochopení úlohy mohol vyjsť utorok, uznávali sme obe možnosti.

Úloha 15

Máme desaťciferné číslo ABCDEFGHIJ, ktoré má všetky cifry rôzne. Ďalej platí, že dvojciferné číslo AB je deliteľné 2, BC je deliteľné 3, CD je deliteľné 4 a tak ďalej až po IJ, ktoré je deliteľné 10. Aké najväčšie číslo spĺňa tieto podmienky?

Riešenie 15

Z jednotlivých informácií zo zadania postupne dostávame nasledovné cifry:

- Keďže IJ je deliteľné desiatimi, J musí byť 0.
- DE je deliteľné piatimi a keďže 0 je už obsadená, E musí byť 5.
- EF, čiže 5F, je deliteľné šiestimi, takže F musí byť 4.
- Kvôli deliteľnosti 8, 6, 4 a 2 musia byť cifry H, F, D a B párne.
- FG, čiže 4G, musí byť deliteľné siedmimi. Takže 4G musí byť buď 42 alebo 49, no párne čísla sú už všetky obsadené ciframi B, D, F, H a J, takže G je 9.
- GH, čiže 9H, musí byť deliteľné ôsmimi, takže H musí byť 6.
- HI, čiže 6I, musí byt deliteľné deviatimi, takže I musí byť 3.

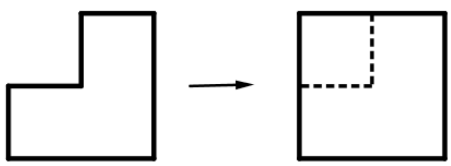
Z doterajšieho postupu vyplýva, že naše číslo je ABCD549630. Keďže hľadané číslo má byť čo najväčšie, vyskúšajme čo najvyššiu možnosť pre cifru A. Tou je 7, keďže A musí byť nepárne a 9 je už obsadené. Podobne najvyššou možnosťou pre cifru B je 8. Z toho dostávame číslo 78CD549630. Keďže D musí byť párne, jediná možnosť na vyskúšanie ostáva 7812549630 a ľahko si overíme, že toto číslo spĺňa všetky podmienky zo zadania. Hľadaným číslom je teda 7812549630.

Úloha 16

Štvorcová lúka so stranou 500 metrov je rozdelená rovnými chodníčkami na 625 štvorcových pozemkov rozmerov 20 × 20 metrov. Pán Gardner vyšiel z niektorej križovatky dvoch chodníčkov a prešiel po chodníčkoch okruh dlhý 1 kilometer (na konci prechádzky sa teda dostal na rovnakú križovatku, z ktorej vyrazil). Koľko najviac pozemkov môže byť „uzavretých" vnútri tejto okružnej cesty pána Gardnera?

Riešenie 16

Najprv si treba uvedomiť, že dráha, ktorá uzatvára najväčší možný počet chodníčkov musí byť konvexná. To znamená, že keď úsečkou spojíme ktorékoľvek dva body vnútri dráhy, táto úsečka nevyjde von z obkoleseného územia. Keby bola dráha nekonvexná, bolo by ju možné zmeniť tak, aby uzatvárala viac pozemkov, ale mala rovnakú dĺžku (viď obrázok).



Z konvexných tvarov pripadajú do úvahy len obdĺžniky a štvorce, keďže pán Gardner sa pohybuje iba po chodníčkoch. Označme si rozmery hľadaného obdĺžnika (alebo štvorca) 20x a 20y. Násobky 20 sú nutné preto, lebo cesta obchádza pozemky rozmerov 20 × 20. Podľa zadania má cesta mať dĺžku 1 km, teda má platiť 2 × (20x + 20y) = 1000, teda x + y = 25. Súčin xy má zároveň byť čo najväčší, keďže určuje počet uzavretých pozemkov. Vyskúšaním všetkých možností dostaneme, že najväčší súčet dáva x = 13 a y = 12, čo zodpovedá 156 pozemkom.

Úloha 17

Medzi všetkými päťcifernými číslami, ktoré neobsahujú cifru 0, nájdite také, pre ktoré je rozdiel tohto čísla a jeho ciferného súčinu čo najväčší.

Riešenie 17

Určite vieme, že hľadané číslo bude začínať ciframi 99. To preto, že aj keď si vezmeme najmenšie také, ktoré zároveň vyhovuje zadaniu, 99111, rozdiel tohto čísla a jeho ciferného súčinu je 99111 – 81 = 99030. Tento rozdiel je väčší než 99000, tým pádom nie je možné ho prekonať žiadnym číslom menším než 99000, pretože druhý člen rozdielov je vždy kladný.
Teraz vyskúšajme týmto spôsobom pokračovať. Ďalšie také číslo je 99911, ktoré má rozdiel 99911 – 729 = 99182. Rozdiel opäť narástol. Pridanie ďalšej deviatky (99991) však už len uškodí, pretože ciferný súčin tohto čísla je 6561, čo zmenšuje rozdiel pod 99000, čo je očividne horšie než to, čo už máme. Na posledných dvoch miestach teda chceme nechať jednotky. Už vieme, že prvé dve cifry musia byť deviatky. Zostáva nám teda prostredná cifra. Čo by sa stalo, keby sme ju nahradili menšou cifrou k? Číslo by kleslo o (9 – k) × 100, zatiaľ čo ciferný súčin by klesol o (9 – k) × 81. Vidíme, že ich rozdiel by sa nutne zmenšil, teda deviatku určite chceme nechať na treťom mieste. 99911 je teda riešením tejto úlohy.

Úloha 18

V slove PIKOMAT nahraďte jednotlivé písmená niektorými rôznymi ciframi od 1 po 9 tak, aby vzniknuté sedemciferné číslo bolo deliteľné 72 a bolo čo najmenšie.

Riešenie 18

Aby číslo bolo deliteľné 72, musí byť deliteľné deviatimi a ôsmimi. Najmenšie číslo, ktoré môžeme vyskúšať je 1234567. Toto nie je deliteľné ôsmimi, takže číslo musíme zväčšiť. Hneď 1234568 je síce deliteľné ôsmimi, no nie je deliteľné deviatimi. Postupným pričítavaním jednotky sa dopracujeme k číslu 1234584, ktoré je deliteľné 72. Tým sme síce narazili na násobok 72, ale v čísle sa opakuje cifra 4, takže zadaniu nevyhovuje. Keďže už ale máme násobok 72, k tomuto násobku môžeme postupne pričítavať 72 a overovať, či výsledok má všetky cifry rôzne. Prvé číslo, ktoré vyhovuje, je 1237896.

Úloha 19

Dom, v ktorom žijú Hugo so Žigom je dlhý – má niekoľko vchodov. V každom vchode sú na každom poschodí 4 byty. Všetky byty v tomto dome sú očíslované po sebe idúcimi prirodzenými číslami. Číslovanie začína na 1. poschodí 1. vchodu a končí na najvyššom poschodí posledného vchodu. Teda byty na prvom poschodí prvého vchodu majú čísla 1 až 4, na druhom poschodí prvého vchodu 5 až 8 atď. Na prízemí každého vchodu sú obchody, ktoré nie sú očíslované. Hugo býva na piatom poschodí v byte č. 83 a Žigo býva v inom vchode na treťom poschodí v byte č. 169. Koľko poschodí má ich dom?

Riešenie 19

Označme si počet poschodí v dome p. Z toho, že Hugo býva na piatom poschodí v byte číslo 83 vyplýva, že byty 81–84 sú na piatom poschodí, byty 77–80 na štvrtom, byty 73–76 na treťom, byty 69–72 na druhom a byty 65–68 na prvom poschodí. To znamená, že v predošlom vchode číslovanie končí bytom 64. Teda 64 musí byť deliteľné 4×p, keďže 4×p označuje počet bytov v jednom vchode.
Žigo býva na treťom poschodí v byte 169. Byty 169–172 sú teda na treťom poschodí, byty 165–168 na druhom a byty 161–164 na prvom poschodí daného vchodu. Číslovanie bytov predošlého vchodu teda končí číslom 160, čiže 160 musí byť deliteľné 4 × p.

Máme teda dve podmienky deliteľnosti: p musí deliť bezo zvyšku čísla 16 a 40. 16 = 2 × 2 × 2 × 2 a 40 = 5 × 2 × 2 × 2, takže p môže byť jedine 2, 4 alebo 8. No keďže Hugo býva na piatom poschodí, vidíme, že p musí byť väčšie alebo rovné 5, takže ostáva jediná možnosť: p = 8. Dom má teda 8 poschodí.

Úloha 20

Ondrej išiel po ulici a počítal, koľko spravil krokov. Vyšlo mu päťciferné číslo, ktoré neobsahuje cifry 0 a 1, ale určite obsahuje práve jednu cifru 6. Prezradil nám, že je v ňom párny počet párnych cifier. Druhá až štvrtá cifra sú menšie ako 4 a v čísle existujú práve dve dvojice susediacich rovnakých cifier. Štvrtá cifra udáva, koľko je v čísle dvojok. Koľko krokov Ondrej napočítal?

Riešenie 20

Označme si hľadané päťciferné číslo ABCDE. Keďže párnych cifier je párny počet a celkový počet cifier je päť, párnych cifier v čísle môže byť jedine nula, dva alebo štyri. No v čísle sa nachádza jedna šestka, takže počet párnych cifier je buď dva alebo štyri.

Štvrtá cifra (D) udáva počet dvojok v čísle. Keďže dvojka je párna a počet párnych cifier (vrátane šestky) je 2 alebo 4, počet dvojok musí byť 1 alebo 3. No keďže jednotka sa v čísle zo zadania nenachádza, cifra D nemôže byť rovná 1, takže D = 3.

V čísle sú teda tri dvojky. Keby bola jedna z týchto dvojok na cifre jednotiek (teda ak E = 2), aby platila podmienka o susediacich dvojiciach rovnakých cifier, číslo ABCDE by muselo byť 22332 a nebola by v ňom žiadna šestka. Tento prípad nastať nemôže, takže E sa nerovná 2.

Tým pádom máme len tri pozície, kam môžeme umiestniť dvojky – na miesta A, B a C. Z hľadaného čísla sa teda stáva 2223E a keďže musí obsahovať cifru 6, dostávame, že ABCDE = 22236. Ľahko si overíme, že toto číslo spĺňa všetky podmienky zo zadania, z čoho vyplýva, že sme našli jediné možné riešenie.

Úloha 21

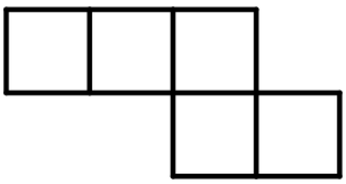
Janko sa naučil rátať na prstoch nasledovne: Počítal na jednej ruke po jednom. Začínal počítať od palca cez ukazovák, prostredník a prstenník, prišiel k malíčku a mal číslo 5. Hneď sa vracal na prstenník (6), prostredník (7), ukazovák (8), palec (9), zase sa vracal na ukazovák (10), prostredník (11) atď. Raz chcel napočítať do 2017. Na ktorý prst mu vyšlo číslo 2017?

Riešenie 21

V Jankovom počítaní sa neustále opakuje nasledovná osemčlenná postupnosť prstov: palec (1), ukazovák (2), prostredník (3), prsteník (4), malíček (5), prstenník (6), prostredník (7), ukazovák (8). Číslo 2017 dáva po delení osem zvyšok 1, takže na číslo 2017 vyjde prvý člen tejto postupnosti, teda palec.

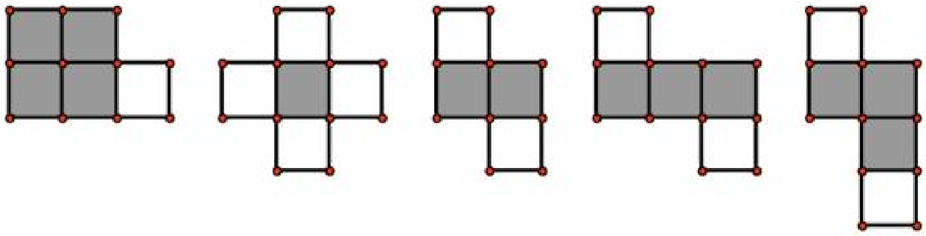
Úloha 22

Každý kúsok Jankovej skladačky je zložený z piatich rovnakých štvorčekov, ktoré sa dotýkajú celými hranami. Jeden z nich vidíte na obrázku. Koľko rôznych kúskov takejto skladačky existuje? Otočené alebo preklopené kúsky nepovažujeme za rôzne.



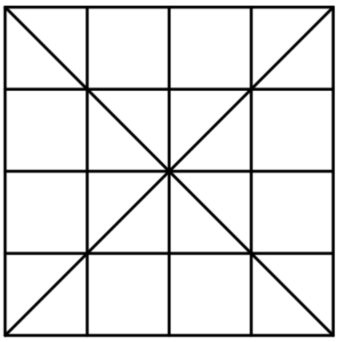
Riešenie 22

Začnime tým, že si niekoľko vecí pomenujeme: Kmeň budeme hovoriť štvorčekom, ktoré sú s inými štvorčekmi spojené aspoň dvoma hranami. List budeme hovoriť štvorčekom, ktoré sú spojené s inými štvorčekmi len jednou hranou. Na obrázku nižšie vidíme všetky možné usporiadania kmeňov. Pre každý z týchto prípadov skúšaním ľahko nájdeme počet dielikov skladačky, ktoré majú toto usporiadanie kmeňov. Je ich postupne: 1 + 1 + 3 + 4 + 3 = 12 (overte si!). Spolu teda existuje 12 možností.



Úloha 23

Koľko trojuholníkov je na obrázku?



Riešenie 23

Aby sme zaručili, že žiadny trojuholník pri počítaní nevynecháme, potrebujeme na počítanie systém. Bez ujmy na všeobecnosti uvažujme, že dĺžka jedného malého štvorčeka je 1 (teda veľkosť celého štvorca je 4 × 4). Na obrázku sú všetky trojuholníky pravouhlé. Možné dĺžky strán trojuholníkov sú 1, 2, 3, 4 a $\sqrt{2}$, $2\sqrt{2}$, $3\sqrt{2}$ a $4\sqrt{2}$. Možné dvojice dĺžok odvesien sú (1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), ($\sqrt{2}$, $\sqrt{2}$), ($2\sqrt{2}$, $2\sqrt{2}$), ku ktorým zodpovedajú obsahy 0,5; 2; 4,5; 8; 1 a 4.

Keď už vieme všetky možné rozmery a obsahy trojuholníkov, môžeme ich spočítať: trojuholníkov s obsahom 0,5 je na obrázku 16, s obsahom 1 sú 4, s obsahom 2 ich je 12, s obsahom 4 sú 4, s obsahom 4,5 ich je 8 a s obsahom 8 sú 4. To je dovedna 16 + 4 + 12 + 4 + 8 + 4 = 48 trojuholníkov.

Úloha 24

Koľko čísel 1 až 10000 má v sebe aspoň jednu cifru 5?

Riešenie 24

Keďže číslo 10000 neobsahuje žiadnu päťku, stačí uvažovať čísla od 1 po 9999.

Uvažujme najskôr čísla od 1 po 99. V každej desiatke (okrem 50–59) je vždy práve jedno číslo s päťkou. V desiatke 50–59 obsahuje päťku všetkých desať čísel. Takže spolu v celej stovke (teda medzi číslami 1 až 99) obsahuje aspoň jednu pätku 9 × 1 + 10 = 19 čísel.

Teraz uvažujme všetky čísla od 1 po 999. V každej stovke (okrem 500–599) je rovnaký počet čísel s päťkou ako medzi 1–99, teda 19. V stovke 500–599 je čísel s päťkou 100. Takže spolu v celej tisícke (teda medzi 1 až 999) obsahuje päťku 19 × 9 + 100 = 271 čísel.

Na záver uvažujme čísla od 1 po 9999. V každej tisícke (okrem 5000–5999) je rovnaký počet čísel s päťkou ako medzi 1–999, teda 271. V tisícke 5000–5999 je čísel s päťkou 1000. Takže spolu v celej desaťtisícke (teda medzi 1 až 9999) obsahuje päťku 271 × 9 + 1000 = 3439 čísel.

Úloha 25

Jedna míľa má 5280 stôp. Vlakové koľajnice majú dĺžku 30 stôp. Po koľajniciach ide vlak, ktorého rýchlosť v míľach za hodinu je prirodzené číslo. Zakaždým, keď vlak prejde po zvare medzi koľajnicami, sa ozve cinknutie. Železničiar Peter sa v tomto vlaku vezie a cinknutia počíta. Koľko sekúnd Peter musí počítať, aby počul rovnaký počet cinknutí, ako je rýchlosť vlaku v míľach za hodinu? Poznámka: keď vlak prejde po n koľajniciach, Peter napočíta n cinknutí.

Riešenie 25

Keďže jedna koľajnica má 30 stôp, do jednej míle sa zmestí 5280/30 = 176 koľajníc. Nech rýchlosť vlaku v míľach za hodinu je n. To znamená, že vlak prejde za hodinu 176n koľajníc. Vlak teda prejde za 3600 sekúnd 176n koľajníc, inak povedané n koľajníc za 3600/176 sekúnd. Takže Peter musí počúvať cinknutia 3600/176 = 20,45 sekúnd.

Úloha 26

Števo hodil červenou a modrou hracou kockou. Zo všetkých možných výsledkov hodov, v koľkých prípadoch by bol súčin hodených čísel väčší ako desať?

Riešenie 26

Všetkých možností dvojíc čísel, čo mohli padnúť, je 6 × 6 = 36. Najjednoduchšie je všetky možnosti si vypísať a súčiny spočítať – súčin je väčší ako desať v 17 prípadoch.

Úloha 27

Štvorec ABCD má stranu AB = 10 cm. Označme jeho stred S. Na strane AB si zvoľme bod X tak, že dĺžka AX = 7 cm. Na strane BC si potom zvoľme bod Y tak, aby uhol YSX bol pravý. Aký obsah má štvoruholník XBYS?

Riešenie 27

Ak si dokreslíme do obrázku zo zadania body K a L, ktoré sú v tomto poradí v stredoch strán AB a BC, vzniknú dva trojuholníky: KXS a LYS. U trojuholníka KXS vieme jeho obsah, pretože |KX| = 2 cm a |KS| = 5 cm. Ak si označíme uhol BXS α, potom vieme, že uhol BYS má 90 – α, pretože zvyšné dva uhly v štvoruholníku BYSX sú pravé a súčet všetkých uhlov štvoruholníku je 360. Z toho však vyplýva, že veľkosť uhla YSL je α, pretože YLS je pravý a súčet uhlov v trojuholníku je 180. Podobne vieme, že veľkosť uhla KXS je 90 – α (pretože rovný uhol má 180). Ďalej vieme, že veľkosť uhla KSX je α, pretože SKX je pravý a súčet uhlov v trojuholníku je 180. Z toho už jednoznačne vyplýva, že trojuholníky KXS a SYL sú zhodné. Tým pádom majú aj rovnaký obsah. Obsah štvoruholníku XBYS je teda obsah KBLS – obsah KXS + obsah SYL = obsah KBLC = 25 cm^2.

Úloha 28

V našom kráľovstve predávajú čokoládu, ktorá stojí 10 dukátov. Ku každej čokoláde je pribalený jeden kupón. Za tri takéto kupóny je možné kúpiť jednu čokoládu. Za aký najmenší počet dukátov je možné kúpiť 500 čokolád?

Riešenie 28

Najskôr ukážeme, že stačí 3340 dukátov. Za ne kúpime 334 čokolád, v ktorých nájdeme 334 kupónov. Jeden si odložíme a za zvyšných 333 kupónov kúpime 111 čokolád. Tým opäť získame 111 kupónov, za ktoré kúpime 111 / 3 = 37 čokolád. S nimi dostaneme 37 kupónov, jeden odložíme a za 36 kúpime 12 čokolád, za získaných 12 kupónov 4 čokolády. Teraz máme 4 kupóny + 2, ktoré sme si odložili. Za týchto 6 kupónov kúpime 2 čokolády. 2 kupóny nám teda zostanú a celkom máme 334 + 111 + 37 + 12 + 4 + 2 = 500 čokolád.

Zostáva dokázať, že za menej peňazí kúpiť 500 čokolád určite nejde. Aká je vlastne hodnota čokolád v dukátoch? Vieme, že platí rovnosť: 3K = 1Č + 1K (za tri kupóny dostaneme 1 čokoládu a 1 kupón), teda 2K = 1Č. Ďalej platí, že 10D = 1Č + 1K (za 10 dukátov dostaneme jednu čokoládu a jeden kupón). Ak dosadíme za 1Č, dostaneme 10D = 3K, teda 1K = 10/3D. Teda jeden kupón má hodnotu 10/3 dukátov a čokoláda 20/3 dukátov. 500 čokolád má teda hodnotu 500 × 20/3 = 3333,33 dukátov. Je zrejmé, že musíme zaplatiť aspoň takú hodnotu, aká je hodnota čokolády. A vzhľadom k tomu, že platíme vždy v násobkoch 10 dukátov, najbližšia taká hodnota je 3340 dukátov.

Úloha 29

Nájdite najmenšie prirodzené číslo, ktoré končí dvojčíslom 56, je deliteľné číslom 56 a jeho ciferný súčet je 56.

Riešenie 29

Z deliteľnosti 56 hneď vyplýva, že požadované číslo musí byť deliteľné 7 a 8. Aby bolo hľadané číslo deliteľné ôsmimi, musí byť aj posledné trojčíslie deliteľné ôsmimi. Z toho vyplýva, že posledné trojčíslie hľadaného čísla musí byť 256, 456, 656 alebo 856. Zadanie zároveň vyžaduje, aby bol ciferný súčin rovný 56. Pretože hľadáme najmenšie také číslo, potrebujeme, aby malo čo najmenej cifier. To dosiahneme tak, že použijeme čo najväčšie cifry. Posledné trojčíslie teda bude 856. Ciferný súčet je 19, zostáva teda 56 – 19, zostáva teda doplniť cifry s ciferným súčtom 37. Najkratšia skupina cifier, ktorá toto spĺňa je 1, 9, 9, 9, 9. Číslo 19999856 však nie je deliteľné siedmimi, teda ani 56. Ciferný súčet však je 56, teda jediný spôsob, ako môžeme dosiahnuť deliteľnosť 7 je zmenšením jednej cifry a zväčšením inej o rovnaký počet. Posledné trojčíslie musíme nechať tak, ako je, a deviatky zväčšiť nemôžeme. Zostáva nám jedine zväčšiť prvú cifru 1 a zmenšiť niektorú z deviatok. Skúsme najskôr zväčšiť prvú cifru len o 1, teda na 2. Ľahko zistíme, že zmenšením druhej deviatky na osem, sa už číslo 29899856 stane deliteľné siedmimi. Teda aj 56 a teda splní všetky podmienky zo zadania.

Úloha 30

Nájdite najväčšie prirodzené číslo, pre ktoré každá dvojica jeho po sebe idúcich cifier tvorí dvojciferné prvočíslo, pričom všetky tieto prvočísla sú navzájom rôzne. Príklad takéhoto čísla je 11731, keďže 11, 17, 73 a 31 sú navzájom rôzne prvočísla.

Riešenie 30

Najvyššie číslo požadovaných vlastností je 619737131179. Cesta k nemu je napríklad takáto: Najskôr si uvedomíme, že prvočísla začínajúce ciframi 2, 4, 5, 6, 8 sa nemôžu vyskytovať nikde vnútri hľadaného čísla, pretože predchádzajúce číslo by nemohlo byť prvočíslom. Teda vnútrajšok hľadaného čísla musíme vyskladať z týchto prvočísel: 11, 13, 17, 19, 31, 37, 71, 73, 79, 97. Teda už vidíme, že hľadané číslo môže mať najviac 11 + 1 = 12 cifier, pretože raz môžeme na začiatku použiť prvočíslo, ktoré začína 2, 4, 5, 6 alebo 8. Zostáva nájsť také poradie, kde využijeme všetky vypísané prvočísla. Toto ide skúšaním, ktoré sa dá zjednodušiť pomocou ďalších úvah (napríklad tak, že si všimneme, koľkokrát sa ktorá cifra môže vyskytovať ako počiatočná a koľkokrát ako koncová).

Úloha 31

Je dané číslo 2017. Pripíšte k nemu jednu cifru doľava a jednu doprava tak, aby výsledné číslo bolo čo najväčšie a deliteľné číslom 68.

Riešenie 31

Čo vlastne znamená, že je číslo deliteľné číslom 68? Znamená to, že je deliteľné číslom 4 a zároveň číslom 17. Pravidlo pre deliteľnosť 17 síce nemáme, ale pravidlo pre deliteľnosť štyrmi je, že posledné dvojčíslie je deliteľné štyrmi. Vzhľadom k tomu, že dané číslo 2017 končí sedmičkou, jediné čísla, ktoré zaň môžeme pridať sú 2 alebo 6. Len pri týchto číslach bude výsledné číslo deliteľné štyrmi.
O poslednej cifre už toho vieme dosť, zamerajme sa teraz na prvú cifru na deliteľnosť 17. Hľadáme čo najväčšie číslo, vyskúšajme teda najskôr, či by prvá cifra mohla byť 9. Skúšame teda, či 920176 alebo 920172 je deliteľné 17. A máme šťastie, 920176 je naozaj deliteľné 17. Tým pádom musí byť 920176 deliteľné aj 68 a je správnym riešením tohto príkladu.

Úloha 32

Koľkými nulami bude končiť súčin $1 \times 4 \times 7 \times \ldots \times 94 \times 97 \times 100$?

Riešenie 32

Nula na konci súčinu vznikne len vtedy, pokiaľ ho vynásobíme desiatimi, resp. pokiaľ ho vynásobíme piatimi a dvomi. Stačí teda spočítať, koľko sa v prvočíselnom rozklade všetkých čísel zo súčinu nachádza dvojok a pätiek a menšie z týchto čísel určuje, koľkými nulami končí súčin (keby napríklad v súčine boli 3 päťky a 2 dojky, tak by vznikli len dve desiatky).
Dvojok bude určite v súčine viac než pätiek, pretože každé druhé číslo v súčine je párne a tu máme k dispozícii minimálne 16 dvojok (v praxi ale omnoho menej, ale pokiaľ je pätiek menej ako 16, tak nás to nemusí mrzieť). Stačí teda, pokiaľ sa zameriame len na čísla v súčine, ktoré sú deliteľné piatimi.
Prvé také číslo bude 10. Pretože čísla v súčine sa zväčšujú vždy o 3, najbližšie ďalšie číslo, ktoré je deliteľné piatimi bude 10 + taký násobok trojky, ktorý je aj násobkom päťky. To je 15, teda ďalšie čísla sú: 10, 25, 40, 55, 70, 85, 100. Spočítajme, koľko v sebe majú pätiek: 10 (1), 25 (2), 40 (1), 55 (1), 70 (1), 85 (1), 100 (2), spolu teda 9 pätiek. Viac pätiek v súčine určite nie je a dvojok máme v súčine viac než 9, súčin teda bude končiť 9 nulami.

Úloha 33

Miška si po úspešnej maturite privyrába počas letných prázdnin ako pokladníčka na kúpalisku Zlaté Triesky. Predáva návštevníkom vstupenky s číslom podľa toho, koľkí v poradí v ten deň prišli: Prvý návštevník dostane vstupenku s číslom 1, druhý s číslom 2, atď. Počas dňa sa však minul žltý papier, na ktorý sa vstupenky tlačili, preto musela Miška pokračovať tlačením na červený papier. Za celý deň predala rovnako veľa žltých vstupeniek ako červených. Večer zistila, že súčet čísel na žltých vstupenkách bol o 1681 menší ako súčet čísel na červených vstupenkách. Koľko vstupeniek v ten deň predala?

Riešenie 33

Pozrime sa, ako vyzerajú oba súčty (žltý a červený): Žltý je súčet čísel od jedna po nejaké číslo x. Červený je súčet od x + 1 po 2x. Napíšme si oba súčty prehľadne pod sebou:
Žltý: $1 + 2 + 3 + 4 + \ldots + (x - 2) + (x - 1) + x = Ž$
Červený: $(x + 1) + (x + 2) + (x + 3) + (x + 4) + \ldots + (x + x - 2) + (x + x - 1) + (x + x) = Č$
Vidíme, že červený súčet nie je nič iné, než žltý súčet, kde sme ku každému z x členov pričítali číslo x. Vieme teda, že $Č = Ž + x \cdot x$. Zároveň však zo zadania vieme, že $x \cdot x = 1681$. Ľahko zistíme, že $x = 41$, Miška teda spolu predala 82 lístkov.

Úloha 34

Maťa, Kaja a Simona sa zúčastnili pretekov. Celkovo bolo v ich kategórii 12 súťažiacich. Po skončení nemali dievčatá čo robiť, tak spočítavali možnosti, ako mohli dopadnúť. Maťa si verila a myslela si, že by mohla skončiť v prvej päťke. Kaja si naopak myslela, že preteky pokazila, takže skončí medzi poslednými štyrmi. Simona začula organizátorov, no nepočula presne. Vedela však, že bude buď 2. alebo 12. Koľko je možností poradia všetkých účastníkov, keď zoberieme do úvahy pocity dievčat?

Riešenie 34

Rozdeľme si úlohu na dva prípady: 1) Simona bola druhá a 2) Simona bola dvanásta.
Pokiaľ by nastal prvý prípad, tak by Maťa bola 1., 3., 4. alebo 5. a Kaja by bola 9., 10., 11. alebo 12. Existuje teda $4 \times 4 = 16$ možností, ako v tomto prípade mohli dopadnúť.
Pokiaľ by nastal druhý prípad, tak by Maťa bola 1., 2., 3., 4. alebo 5. a Kaja by bola 9., 10. alebo 11. Existuje teda $5 \times 3 = 15$ možností, ako v tomto prípade mohli dopadnúť.
Spolu je teda $15 + 16 = 31$ možností, ako mohli dopadnúť. Nesmieme však zabudnúť ani na ostatné súťažiace. Tie mohli v rámci zvyšných deviatich miest dopadnúť akokoľvek, teda mali $9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$ možností ako mohli skončiť (zamyslite sa, prečo to tak je). Celkom teda existuje $9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 \times 31 = 11249280$ možností.

Úloha 35

V miestnosti stojí šesť stoličiek v dvoch radoch po troch stoličkách. Koľkými spôsobmi na ne môžeme usadiť dvoch študentov z Gamče, dvoch študentov z GJH a dvoch študentov z Pároviec, ak žiadny študent z Gamče nechce sedieť vedľa žiadneho študenta z GJH?

Riešenie 35

Zamyslime sa najskôr nad týmto: Pre každú stoličku určíme, ktorej škole bude „patriť“ a rozostavíme ich podľa pravidiel zo zadania (teda „Gamčácke“ a „GJHácke“ stoličky nebudú nikdy vedľa seba). Ak to spravíme, koľkými spôsobmi môžeme na takto určené stoličky rozsadiť konkrétnych študentov? Pre každú školu máme 2 možnosti, ako študentov rozsadiť na dve stoličky, spolu máme teda $2 \times 2 \times 2 = 8$ možností. Teraz nám stačí vyriešiť o niečo jednoduchšiu úlohu a teda ako priradiť stoličky školám. Výsledok tejto podúlohy potom len vynásobíme ôsmimi. Rozdeľme si všetky možnosti na dva prípady: 1) Obaja Gamčáci sedia v rovnakom rade a 2) Každý Gamčák sedí v inom rade.
V prvom prípade máme 2 možnosti, ako vybrať rad, kde budú sedieť Gamčáci. Potom máme 3 možnosti, ako vybrať dve stoličky v tomto rade, na ktorých budú sedieť Gamčáci. Teda spolu $2 \times 3 = 6$ možností. Je zrejmé, že v rade, kde sedia dvaja Gamčáci už nemôže sedieť nikto z GJH. GJHáci teda majú opäť 3 možnosti, ako sa rozsadiť vo zvyšnom rade. Študenti z Pároviec len vyplnia zvyšné prázdne stoličky, jednu v každom rade. Spolu je teda v prvom prípade $2 \times 3 \times 3 = 18$ možností. V druhom prípade bude sedieť jeden Gamčák v každom rade. Nemôžu však sedieť ani v jednom rade uprostred, pretože by si už nemali kam sadnúť študenti z GJH. Majú teda 2 možnosti v každom rade, spolu teda $2 \times 2 = 4$ možnosti, ako si sadnúť. Študenti z Pároviec si opäť len vezmú zostávajúce stoličky.
Spolu je teda $(2 \times 3 \times 3 + 2 \times 2) \times 2 \times 2 \times 2 = (18 + 4) \times 8 = 22 \times 8 = 176$ možností ako študentov rozsadiť.

Úloha 36

Máme rad figúrok, ktorých je presne 1000. Jedna z týchto figúrok je biela a všetky ostatné sú čierne. Začneme figúrky postupne vyraďovať. Vyraďovať ich budeme takto: najskôr z tisícky figúrok vyradíme tie, ktoré stoja na nepárnych pozíciách. Ostane teda 500 figúrok. Z nich opäť vyradíme tie, ktoré teraz stoja na nepárnych pozíciách. Tak budeme pokračovať dovtedy, kým na stole ostane posledná, jediná figúrka. Na ktorú pozíciu máme umiestniť bielu figúrku na začiatku, ak chceme aby nám ostala ako tá posledná?

Riešenie 36

V prvom kole vyraďovania vyradíme všetky figúrky, ktoré stáli na pozíciách, ktoré neboli deliteľné dvomi, teda s číslami 1, 3, 5, ..., 999. V druhom kole zostávajúce figúrky na nepárnych pozíciách. Pokiaľ by sme ich však nechali na pôvodných očíslovaných miestach, tak by sme vyraďovali figúrky s číslami 2, 6, 10, 14, ..., 994, 998, teda všetky také, čo boli na pozícii deliteľnej dvomi, ale nie štyrmi. V ďalšom kole by sme zase vyraďovali figúrky na pozíciách 4, 12, 20, ...988, 996, teda na pozíciách deliteľných štyrmi, ale nie ôsmimi.

Vidíme, že v každom vyraďovacom kole sa zdvojnásobí číslo prvej figúrky, ktorú vyraďujeme a potom len opakovane pričítavame dvojnásobok tohoto čísla a vyraďujeme figúrky na týchto pozíciách. Pokiaľ by sme sa teda pozreli len na číslo prvej figúrky, ktorá bude v každom kole vyradená, dostaneme 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512 (ďalej už nie, pretože ďalšie číslo je 1024, ale takú figúrku už nemáme). V poslednom kole teda začneme tým, že vezmeme figúrku s číslom 512. Ďalšia figúrka, ktorú by sme v tomto kole mali vziať, by mala poradové číslo 512 + 1024 = 1536, ale taká figúrka nie je. Tým pádom toto kolo bude posledné a vezmeme v ňom len poslednú figúrku, tú na mieste 512. Toto je teda pozícia, kam chceme umiestniť bielu figúrku.

Úloha 37

ABCD je lichobežník so základňami AB a CD a P je priesečník jeho uhlopriečok. Obsah trojuholníka ABP je 25 cm^2 a obsah trojuholníka PCD je 16 cm^2. Aký je obsah celého lichobežníka v cm^2?

Riešenie 37

Nakreslime si obrázok zo zadania a označme |AB| = a, |CD| = b, výšku trojuholníka ABP na stranu AB v_a, výšku trojuholníka CDP v_b. Pomocou striedavých uhlov zistíme, že uhly BAC a ACD majú rovnakú veľkosť a uhly ABC a BDC majú rovnakú veľkosť. Z toho vyplýva, že trojuholníky ABP a CDP sú podobné (majú zhodné všetky tri vnútorné uhly, majú však rôzne rozmery). Z toho, že ABP a CDP sú podobné vyplýva, že pomery dĺžok strán a výšok sú v nich rovnaké, teda platí v_a / v_b = a / b, čo sa dá upraviť na av_b = bv_a. Takisto tiež vieme, že pomery obsahov sú 25 / 16 = av_a / bv_b. Dosadením prvého vzťahu do druhého dostávame 25 / 16 = v_a v_a / v_b v_b, teda 5 / 4 = v_a / v_b, teda v_b = 4/5 v_a. Obsah lichobežníka, ktorý chceme zistiť, je (v_a + v_b) (a + b) / 2.

Pokiaľ toto roznásobíme, dostaneme: av_a / 2 + bv_b / 2 + av_b / 2 + bv_a / 2. Hodnoty prvých dvoch členov výrazov vieme, pretože to sú len obsahy trojuholníkov ABP a CDP. Použitím av_b = bv_a môžeme tieto dva zvyšné členy zjednodušiť na jeden: av_b. Pretože v_b = 4/5 v_a, potom av_b = 4/5 av_a = 8/5 av_a / 2 = 8/5 × 25 = 40. Celkový obsah lichobežníka je teda 16 + 25 + 40 = 81 cm^2.

Úloha 38

Majme štvorčekovú tabuľku 7 × 7, ktorá má v každom políčku vpísané číslo. Zároveň platí, že súčet čísel v ľubovoľných štyroch susedných políčkach zdieľajúcich spoločný vrchol je v celej tabuľke rovnaký. V ľavom hornom rohovom políčku je pritom číslo 10, v ľavom dolnom rohovom políčku je 15. Aký je rozdiel čísel vpísaných v pravom hornom a pravom dolnom rohovom políčku?

Riešenie 38

Rozdeľme si tabuľku na 8 častí ako na obrázku. Zaujíma nás rozdiel X – Y.

10			A			X
B			S			C
15			D			Y

Pozrime sa teraz na ľavý vrchný roh a časti A, B, S a ľavý spodný roh a časti B, D, S. Zo zadania vieme, že ich súčty musia byť rovnaké, pretože obsahujú obe 9 štvoríc, ktoré musia mať rovnaké súčty. Platí teda: 10 + A + B + S = 15 + B + D + S. Úpravou dostaneme 10 + A = 15 + D, čo ďalej vieme upraviť na A – D = 5. Podobne pre pravú stranu tabuľky dostaneme X + A + C + S = Y + C + D + S, teda X + A = Y + D, čo ďalej upravíme na A – D = Y – X. Vieme však, že A – D = 5, teda Y – X = 5.

Úloha 39

Maťko s Kubkom predali svoje stádo oviec. Ovce predali všetky naraz a za každú ovcu dostali toľko eur, koľko malo celé stádo oviec. Peniaze im boli vyplatené v desaťeurovkách a minciach. Keď si delili desaťeurovky systémom „jednu tebe – jednu mne“, jedna zvýšila. Maťko navrhol: „Ja si vezmem tú zvyšnú desaťeurovku a ty si zober všetky mince!“ Kubko však nesúhlasil: „To by som dostal menej ako ty!“ A tak Maťko návrh vylepšil: „Tak ti k tým minciam ešte vypíšem šek na takú sumu, aby sme sa vyrovnali.“ S tým Kubko súhlasil. Na koľko eur bol ten šek?

Riešenie 39

O čísle udávajúcom počet eur vieme:

1) Je to druhá mocnina.

2) Pozostáva z nepárneho počtu desiatok + zvyšku, ktorý je menší než 10.

Zamerajme sa teraz na druhé mocniny, ktoré majú na mieste desiatok nepárnu cifru: 16, 36, 196, 256, ... To nás vedie k hypotéze, že pokiaľ má druhá mocnina na mieste jednotiek cifru 6, je jej cifra na mieste desiatok nepárna. Toto ľahko dokážeme tak, že si vypíšeme tabuľku posledných dvojčíslí druhých mocnín:

01, 04, 09, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 00,
21, 44, 69, 96, 25, 56, 89, 24, 61, 00,
41, 84, 29, 76, 25, 76, 29, 84, 41, 00,
81, 64, 49, 36, 25, 16, 09, 04, 01, 00,
01, 04, 09, 16, 25, ... atď.

Vidíme, že od 5. riadku sa už celá postupnosť opakuje, čo nám zaručuje, že sme touto tabuľkou pokryli všetky možnosti. Taktiež vidíme, že platí hypotéza, ktorú sme si utvorili. Tým pádom vieme, že suma peňazí, ktoré zvýšili, je 6 eur. Tým pádom by Kubko dostal o 4 eurá menej (6 eur miesto 10). Šek teda musel byť na 2 eurá (Kubko si polepšil o 2 eurá, Maťko pohoršil o dve, čo vyrovnávajú dané 4 eurá).

Úloha 40

Koľko existuje trojciferných čísel, v ktorých sa žiadna cifra neopakuje a cifra na mieste desiatok je menšia než cifry na mieste stoviek a jednotiek?

Riešenie 40

Rozdeľme si možnosti podľa cifry na mieste desiatok. Na mieste desiatok určite nemôže byť cifra 9 ani 8. Najväčšia cifra, ktorý tu môže byť, je 7. Pre 7 existujú dve možnosti, ako môže číslo vyzerať: 978 a 879. Pokiaľ je na mieste desiatok cifra 6, je už možností viac: na mieste stoviek si môžeme vybrať z troch možností (7, 8, 9) a na mieste jednotiek z dvoch (nesmieme si vybrať už tú cifru, ktorú sme si vybrali na mieste stoviek). Spolu je teda pre cifru 6 na mieste desiatok 3 × 2 = 6 možností. Pre cifru 5 na mieste desiatok to bude podobne 4 × 3 = 12 možností, atď. až po cifru jedna na mieste desiatok, kde to bude 9 × 8 možností. Spolu teda 2 + 6 + 12 + 20 + 30 + 42 + 56 + 72 = 240 možností.

Úloha 41

Pán Blesk získal najnovší typ lietajúceho koberca. Jeho spotreba pri rýchlosti x kilometrov za hodinu je iba x/10 litrov kvalitného čínskeho čaju na 100 kilometrov. Teda napríklad pri rýchlosti 28 km/h je to 2,8 litrov na 100 km. Ako ďaleko od hradu sa môže najviac vzdialiť, ak presne o hodinu má byť naspäť a má iba 1 liter kvalitného čínskeho čaju? Predpokladáme, že pán Blesk sa celý čas pohybuje rovnakou rýchlosťou.

Riešenie 41

Začnime tým, že si vyjadríme lepšie spotrebu. Pokiaľ koberec spotrebuje x/10 litrov na 100 km, potom je to to isté ako povedať, že spotrebuje x litrov na 1000 km.
Dajme tomu, že by sa pán Blesk rozhodol zaletieť si 10 km ďaleko. Potom by musel letieť rýchlosťou 20 km/h, aby bol späť za 1 hodinu (musí preletieť 10 km tam a 10 km zase späť). Tým pádom by jeho spotreba bola 20 litrov na 1000 km. Pretože by letel len 10 km ďaleko, spotreboval by 20/1000 = 0.02 litrov čaju na kilometer. Preletel by 20 km, takže by spotreboval 0,4 l čaju. Dobrý pokus, ale ešte nám zostalo 0,6 l čaju, išlo by to určite aj lepšie.
Skúsme to všeobecne: Pokiaľ by pán Blesk preletel x km, musel by letieť rýchlosťou 2x km/h. Potom by mal spotrebu na 1 km: 2x / 1000. Jeho celková spotreba by bola x · 2x / 1000, teda $2x^2$ / 1000 litrov. Vieme, že pán Blesk má k dispozícii 1 liter, teda $2x^2$ / 1000 = 1. Upravením dostávame x = $\sqrt{1000}/2$ = 15,81.

Úloha 42

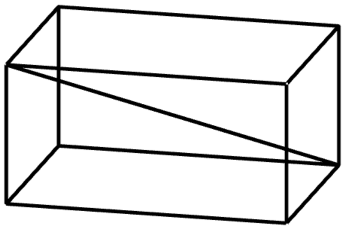
V rovine je niekoľko bodov, každý je buď žltý, modrý alebo červený. Z každej farby je aspoň jeden. Žiadne tri neležia na jednej priamke. Dá sa vždy nájsť taký trojuholník, ktorého vrcholy sú jeden žltý, druhý modrý a tretí červený a v ktorom nie je žiadny iný bod z našich bodov?

Riešenie 42

Vyberme si ľubovoľné tri body rôznych farieb. Tieto tri body tvoria trojuholník. Teraz môžu nastať 2 možnosti:
1) Vnútri tohto trojuholníka sa nenachádza žiadny bod. Potom je podmienka zo zadania jednoducho splnená.
2) Vnútri tohto trojuholníka sa nachádza bod P farby B. Potom nám stačí vziať bod P a zostrojiť nový trojuholník, ktorý bude tvorený dvoma vrcholmi, ktoré nemajú farbu B, z pôvodného trojuholníka a bodom P. Tým sa trojuholník zmenší, ale stále bude platiť, že jeho vrcholy sú troch rôznych farieb. Možnosť 2) sa bude opakovať až do doby, než bude platiť možnosť 1), čo sa pri konečnom počte bodov vždy stane. Tým sme ukázali, že trojuholník vyhovujúci zadaniu vždy nájdeme.

Úloha 43

Kváder 30 × 40 × 50 cm je rozrezaný na 60 kociek 10 × 10 × 10 cm. Koľkými z nich prechádza telesová uhlopriečka kvádra?



Riešenie 43

Telesová uhlopriečka musí prejsť tromi vrstvami kociek do hĺbky, štyrmi vrstvami kociek do šírky a piatimi vrstvami kociek do dĺžky. Pretože vrstvy majú rovnaké rozmery vo všetkých smeroch, budú tieto prechody medzi jednotlivými vrstvami úplne pravidelné. Teda v 1/3 a 2/3 dĺžky uhlopriečky zmenia vrstvu do hĺbky, v 1/4, 2/4 a 3/4 zmenia vrstvu do širky a v 1/5, 2/5, 3/5 a 4/5 zmenia vrstvu do dĺžky. Pretože žiadne dva z týchto zlomkov nie sú rovnaké, vždy nastane prechod do inej vrstvy kociek len v jednom smere. A pri každej zmene vrstvy nutne príde i k zmene kocky. Zmien je spolu 2 + 3 + 4 = 9, no ešte musíme započítať kocku, v ktorej začíname, spolu teda telesová uhlopriečka prejde 10 kockami.

Úloha 44

Do podniku prišiel oznam, aby poslali na železničnú stanicu nákladné autá pre objednanú zásielku tovaru o celkovej hmotnosti 10 ton. Tovar je balený v debniach, z ktorých žiadna nemá hmotnosť vyššiu ako 1 tona. Podnik vlastní autá, ktoré majú nosnosť 3 tony. Určte, koľko najmenej áut treba poslať na stanicu, aby mal podnik istotu, že autá budú môcť naraz priviezť celú zásielku.

Riešenie 44

Na prvý pohľad sa zdá, že správne riešenie je 4, pretože 4 autá majú kombinovanú nosnosť 12 ton. Toto však neberie do úvahy to, že autá nemusia byť využité naplno. Predstavme si napríklad situáciu, kedy by každá debna vážila 10/13 tony. Každé z áut by uviezlo len 3 také debny (pretože 4 debny po 10/13 ton vážia spolu približne 3,08 tony) a tým pádom by bolo treba áut poslať 5. Stačí však 5 áut v každom prípade? Každé auto uvezie aspoň 2 tony. To preto, že pokiaľ by auto malo naložené menej než 2 tony tovaru, určite by sme doňho mohli pridať ešte jednu debnu, ktorá má určite menej než 1 tonu. Pretože teraz máme päť áut po dvoch tonách, určite spolu uvezú aspoň 10 ton nákladu. Týmto sme dokázali, že 5 áut bude vždy stačiť.

Úloha 45

Akým najmenším počtom priamok sa dá rovina rozdeliť na 1000 častí?

Riešenie 45

Toto bol veľmi ťažký príklad určený pre záverečné zamyslenie tímom, ktoré sa prebojovali až sem!

Ak je na rovine jedna priamka, rozdeľuje ju na 2 časti. Ak pridáme ďalšiu priamku, rôznobežnú s pôvodnou priamkou, 2 priamky budú rozdeľovať rovinu na 4 časti. Čo sa stane, ak pridáme ďalšiu priamku, rôznobežnú s oboma predošlými, ktorá tieto priamky pretne v 2 bodoch? Táto priamka bude týmito dvoma bodmi rozdelená na 3 úseky. Každý z týchto úsekov rozdelí inú, už existujúcu časť roviny na dve nové časti. Tým pádom pri troch priamkach bude rovina rozdelená na 7 častí.

Predstavme si situáciu, kde je už v rovine n rôznobežných priamok tak, že sa v žiadnom bode nepretínajú viac než dve priamky. Ak pridáme ďalšiu novú priamku, ktorá bude opäť rôznobežná k všetkým ostatným priamkam v rovine a nebude prechádzať žiadnym priesečníkom dvoch priamok, ktoré už v rovine sú, táto priamka pretne tie existujúce v n bodoch. Tým pádom bude rovina rozdelená na n + 1 úsekov. Každým týmto úsekom rozdelí už existujúcu časť roviny na dve nové časti a tým pádom v rovine pribudne n + 1 nových častí. Toto je zároveň maximálne možné množstvo pridaných častí, pretože nová pridaná priamka nemôže pretínať viac, než n rôznych častí roviny.

Pokiaľ je teda v rovine jedna priamka, delí ju na 2 úseky. Dve priamky delia rovinu na 2 + 2 = 4 úseky. Tri na 2 + 2 + 3 = 7, štyri na 2 + 2 + 3 + 4 = 11, päť na 2 + 2 + 3 + 4 + 5 = 16, ... Stačí tento rad sčítať až po 45, teda 2 + 2 + 3 + 4 + 5 + ... + 44 + 45 a dostaneme 1036, čo je prvýkrát, kedy prekročíme 1000. Minimálny počet priamok nutných na rozdelenie roviny na 1000 častí je teda 45.