Vzorová řešení MatX 2017

matx.p-mat.sk

15. února 2017

Úloha 1

Matilda dělala mezi spolužáky experiment. Na otázku: „Jaký obvod má obdélník, který má obsah 210 cm^2 a délky jeho stran jsou celá čísla?“ dostala 7 různých odpovědí. Mohly být všechny správné?

Řešení 1

Vypišme si rozměry všech možných obdélníků, které splňují Matildinu podmínku: 1 × 210, 2 × 105, 3 × 70, 5 × 42, 6 × 35, 7 × 30, 10 × 21, 14 × 15. Je jich osm. Snadno ověříme, že mají různé obvody. Tím pádem mohlo být dokonce všech těchto osm čísel správnou odpovědí na Matildinu otázku, tedy i všech sedm odpovědí mohlo být správných.

Úloha 2

Máme následující posloupnost čísel:
1, 2, 3, 4, 5,
7, 9, 11, 13, 15,
18, 21, 24, ...
Jaký bude 80. člen této posloupnosti?

Řešení 2

Na konci prvního řádku posloupnosti je číslo 5, což je 5. číslo posloupnosti, na konci druhého řádku je číslo 15, 10. číslo posloupnosti, na konci třetího řádku je číslo 30, což je 15. číslo posloupnosti. Tedy 80. číslo posloupnosti bude na konci 80 / 5 = 16. řádku posloupnosti. A vidíme, že poslední číslo na řádku číslo n je vždy o 5 × n větší než poslední číslo na předešlém řádku. To proto, že toto poslední číslo na řádku dostaneme tak, že pětkrát přičteme číslo řádku k poslednímu číslu na předcházejícím řádku, Tím pádem poslední číslo na 16. řádku (tedy 80. číslo posloupnosti) bude 5 + 10 + 15 + 20 + 25 + 30 + 35 + 40 + 45 + 50 + 55 + 60 + 65 + 70 + 75 + 80 = 680.

Úloha 3

Vícecifernému číslu říkáme optimistické, pokud jeho číslice zleva doprava rostou. Pokud číslice zleva doprava klesají, tak mu říkáme pesimistické. Máme pesimistické číslo P a optimistické číslo Q. Čísla P i Q mají stejné cifry. Součet P a Q je 109900, rozdíl P a Q je 84942. Jaké je pesimistické číslo P?

Řešení 3

Čísla P a Q musejí být pěticiferná. To proto, že jejich součet je šesticiferný a začíná jedničkou – kdyby P a Q byla obě čtyřciferná, tak by jejich součet byl maximálně pěticiferný. Pokud by obě byla šesticiferná, tak by jejich šesticiferný součet začínal alespoň dvojkou.

P a Q jsou tedy pěticiferná a víme, že mají stejné cifry. Díky vlastnostem optimistických a pesimistických čísel z tohoto vyplývá, že P je Q pozpátku. Nechť Q = abcde, potom P = edcba a platí a < b < c < d < e. Využijme Q + P = 109900 = abcde + edcba. Vidíme, že a + e = 10, protože poslední cifra P + Q je nula. Máme tedy čtyři možnosti: a = 1, e = 9; a = 2, e = 8; a = 3, e = 7; a = 4, e = 6. Další určitě nevyhovují, protože a musí být menší než e. Z rozdílu P a Q rovnou víme, že e – a = 8, tedy a = 1, e = 9. Déle víme, že b + d + 1 = 10, protože předposlední cifra P + Q je 0 a jednička šla dále při sečtení a + e. Jsou tři možnosti: b = 2, d = 7; b = 3, d = 6; b = 4; d = 5.
Z rozdílu P – Q opět víme, že b – d + 1 (jednička šla dále z a – e = –4), což splňuje b = 2, d = 7. Tedy už skoro máme P = 97c21. Ze součtu P + Q již snadno zjistíme, že c = 4, tedy P = 97421.

Úloha 4
Jednoho dne zpozoroval hasič z okna požární stanice dým valící se zpoza hory. Nevěděl však přesně, kde hoří, protože za horou jsou tři obce: Pravdice (jejichž obyvatelé vždy říkají pravdu), Lhářov (jehož obyvatelé vždy lžou) a Střídavá Lhota (jejíž obyvatelé hovoří střídavě: první větu řeknou pravdu, druhou lžou, třetí pravdu, atd.). Než se hasič vzpamatoval, začal zvonit telefon: „Honem, přijeďte, hoří u nás.“ „Kde?“ zeptal se hasič. „V Střídavé Lhotě!“ odpověděl vzrušený hlas. Do které ze tří obcí mají hasiči vyrazit?

Řešení 4
Nejdřív zjistíme, kdo volal. Nemohl to být obyvatel Pravdic, protože potom by jeho druhá věta musela být nepravdivá. Kdyby to byl člověk ze Střídavé Lhoty, tak by z jeho první věty vyplývalo, že hoří ve Střídavé Lhotě, ale jeho druhá věta by potom byla taky pravdivá, což u člověka ze Střídavé Lhoty není možné. Z toho vyplývá, že musel volat člověk z Lhářova.

Z první věty víme, že nehoří v Lhářově, protože musí být nepravdivá. Z druhé věty víme, že nehoří v Střídavé Lhotě, protože rovněž musí být nepravdivá. Hoří tedy v Pravdicích.

Úloha 5
Naše třída si plánovala po soutěži MatX udělat turistický výlet. Někteří žáci se dohadovali o délce trasy a tvrdili, že je to 16, 28, 32, 37 a 15 km. Mýlili se však o 5, 7, 8, 9 a 14 km. Jak dlouhý byl výlet ve skutečnosti?

Řešení 5
Podívejme se na nejmenší a největší vyslovené odhady délky trasy: 15 km a 37 km. Člověk, který řekl 15 km, řekl nutně méně, než byla trasa dlouhá ve skutečnosti. Naopak člověk, který řekl 37 km, řekl nutně více, než byla trasa dlouhá ve skutečnosti. Kolik tedy mohla být délka trasy? Skutečná délka trasy tedy musela být jedno z čísel 15 + 5 = 20, 15 + 7 = 22, 15 + 8 = 23, 15 + 9 = 24 a 15 + 14 = 29. Zároveň však musela být jedno z čísel 37 – 5 = 32, 37 – 7 = 30, 37 – 8 = 29, 37 – 9 = 28, 37 – 14 = 23. Jediné číslo, které se shoduje v obou případech je 23. Zkusme tedy, zda zbylé tři chyby napasujeme na zbylé tři odhady. Jednoduchým zkoušením dostáváme: 16 + 7 = 23, 28 – 5 = 23, 32 – 9 = 23. Výsledek je tedy 23 km.

Úloha 6
Pat napsal na tabuli příklad s chybou: 550 + 461 + 359 + 341 = 2017. Mat to chtěl opravit, proto začal pátrat po neznámém čísle, které by přičetl ke každému z pěti uvedených čísel, aby byl příklad potom vypočítaný správně. Jaké bylo toto neznámé číslo?

Řešení 6
Součet na levé straně je 550 + 461 + 359 + 341 = 1711. Přičteme-li ke každému z těchto čísel číslo x, zvětší se tento součet o $4x$. Naopak na pravé straně původní rovnice je číslo 2017. Přičteme-li k tomuto číslo

číslo x, zvětší se hodnota pravé strany rovnice o x. Hledáme tedy x, pro které platí: $1711 + 4x = 2017 + x$. Upravíme na $4x = 306 + x$, dostáváme $3x = 306$, tedy $x = 102$. Ke každému z čísel musíme přičíst 102.

Úloha 7

Na stěnách kostky jsou napsané číslice od 1 do 6, každá právě jednou. Na každé stěně je napsaná právě jedna číslice. Když se na kostku podívám ze tří různých pohledů, pokaždé uvidím jinou trojici stěn. Součty těchto trojic jsou 9, 9 a 13. Které číslo je na kostce oproti číslu 2?

Řešení 7

Máme k dispozici čísla 1, 2, 3, 4, 5, 6. Existují jen 2 různé trojice, které dávají součet 13: $2 + 5 + 6$ a $3 + 4 + 6$. Existují také jen 3 různé trojice, které dávají součet 9: $1 + 2 + 6$, $1 + 3 + 5$, $2 + 3 + 4$. Nyní si na prázdnou kostku napíšeme číslo 2. Postupným systematickým zkoušením možností, která čísla mohou být naproti stěně s číslem 2 za použití trojic zmíněných výše se dostaneme k tomu, že naproti dvojce mohou být jednička nebo trojka. Například takto: 1–4, 2–3, 5–6, nebo 1–2, 3–6, 4–5 (dvojice čísel s pomlčkou jsou na stěnách proti sobě).

Úloha 8

Terka si nakreslila úsečku AB a na ni umístila bod C. Potom nakreslila ještě bod D tak, aby úsečky AD, CD a BC měly všechny stejnou délku a úhly ADC a CDB měly stejnou velikost. Jakou velikost měl úhel BAD?

Řešení 8

Strany BC a BD mají stejnou délku, takže trojúhelník BCD je rovnoramenný. Takže úhly CDB a DBC mají stejnou velikost, řekněme x. Velikost úhlu BCD je potom $180 – 2x$ ze součtu úhlů v trojúhelníku BCD a velikost úhlu DCA je $180 – (180 – 2x) = 2x$, protože součet velikostí úhlů BCD a DCA musí být 180. Ze zadání víme, že úhly CDB a CDA jsou stejné, takže úhel CDA má velikost x. Ze součtů úhlů v trojúhelníku CAD tím pádem vyplývá, že velikost úhlu CAD je $180 – 3x$. Strany CD a AD jsou stejně dlouhé, takže trojúhelník CAD je rovnoramenný a úhly CAD a DCA jsou stejné. Takže $180 – 3x = x$. Řešením této rovnice je jedině $x = 32$ a protože $2x$ = DCA = CAD = BAD, dostáváme, že úhel BAD má 72 stupňů.

Úloha 9

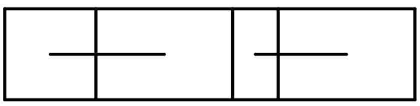
Pro které pěticiferné číslo x platí, že pokud před x dopíšeme jedničku, dostaneme číslo třikrát tak menší, než kdybychom dopsali jedničku za číslo x?

Řešení 9

Když před číslo x dopíšeme jedničku, dostaneme číslo $100000 + x$. Když za číslo x dopíšeme jedničku, dostaneme číslo $10x+1$. Ze zadání tedy číslo $100000+x$ je třikrát tak menší než $10x+1$, tedy $3(x+100000) = 10x + 1$. Řešením této rovnice je 42857 a můžeme si ověřit, že $3 \times 142857 = 425871$.

Úloha 10

Matěj rozdělil proužek papíru délky 42 cm na čtyři různé obdélníky. Potom spojil středy obdélníků dvojicí úseček tak, jak je znázorněno na obrázku. Jaký je součet délek těchto dvou úseček v centimetrech?



Řešení 10
V každém ze čtyř obdélníků má úsečka poloviční délku než je délka strany daného obdélníka. Takže celková délka nakreslených úseček je polovinou součtu délek stran všech čtyřech obdélníků. Tento součet je 42 cm, protože původní pásek papíru má délku 42 cm. Takže celková délka nakreslených úseček je 42 / 2 = 21 cm.

Úloha 11
Máme dvojciferné číslo, pro jehož cifry platí, že pokud jejich součin a součet sečteme, dostaneme opět původní číslo. Jakou cifru má toto číslo na místě jednotek?

Řešení 11
Zapišme si číslo s touto vlastností jako 10a + b, kde a je první cifra a b je druhá cifra daného čísla. Ze zadání vyplývá, že a + b + ab = 10a + b. Zjednodušením této rovnice dostaneme ab = 9a. Cifra a nikdy nemůže být nula, protože číslo 10a + b je dvojciferné. Takže z rovnice vyplývá, že b = 9, tedy že druhá cifra čísla s hledanou vlastností je 9.

Úloha 12
V krabici je 10 bílých, 8 červených a 11 černých kuliček. Kolik nejméně jich musíme vytáhnout (taháme poslepu), abychom měli jistotu, že mezi vytáhnutými budou z každé barvy alespoň dvě?

Řešení 12
Největší možný počet kuliček, kdy ještě není splněná podmínka ze zadání, je tehdy, když máme ze dvou barev všechny kuličky a ze třetí barvy jen jednu kuličku. Jaké je toto množství v tomto případě? Můžou to být 10 + 8 + 1 = 19, nebo 10 + 11 + 1 = 22, nebo 11 + 8 + 1 = 20. Vidíme, že nejvíce je 22. Pokud bychom tedy měli maximální smůlu a vytáhli si 10 bílých, 11 černých a jednu červenou, stále by ještě podmínka ze zadání nebyla splněná. Přidáním jedné kuličky však již určitě splněná i v tomto případě bude a tedy odpověď je 23.

Úloha 13
Adam a Bedřich si udělali výlet do města Odmocnina nad Kvadrátem. Jeden z nich jel na kole a jeden autem (auto bylo rychlejší než kolo). Vyrazili současně. V jistém okamžiku nastala tato situace: Kdyby byl Adam doposud ujel dvakrát tak méně, zůstávalo by mu ujet třikrát tak více a kdyby byl Bedřich doposud ujel dvakrát tak více, zůstávalo by mu ujet třikrát tak méně. Kdo z nich jel na kole?

Řešení 13
Bez újmy na obecnosti předpokládejme, že celková délka trasy, kterou Adam i Bedřich musí ujet je 1 km. Označme si jako x délku cesty, která zůstává Adamovi v momentě, který je popsaný v zadání. Nechť je tento moment přítomností. Kdyby byl Adam ujel dosud dvakrát tak méně, tak by byl ujel $(1 - x)/2$. Ze zadání víme, že by mu chybělo třikrát tak více, než mu chybí teď, takže by mu chybělo $3x$. Takže doposud by byl ujel $1–3x$. Takže $1–3x = (1–x)/2$, z čehož plyne, že $x = 1/5$. Adamovi tedy zůstává 1/5 celkové tratě. Podobnou úvahou dospějeme k tomu, že Bedřichovi zůstávají 3/5 celkové trati. Takže Adam doposud ujel více než Bedřich a na kole tím pádem musel jet Bedřich.

Úloha 14
Když se pozítřek stane včerejškem, tak dnešek bude tak daleko od neděle jako den, který byl dneškem, když předvčerejšek byl zítřkem. Který den je dnes?

Řešení 14

Když se pozítřek stane včerejškem, bude den, který můžeme nazvat popozítřkem. Když předvčerejškem bylo zítra, byl den, který můžeme nazvat předpředvčerejškem. Podle zadání tyto dny mají být stejně vzdálené od neděle. Když se podíváme na schéma PPV-PV-V-D-Z-PZ-PPZ, vidíme, že dni PPV a PPZ jsou od sebe vzdálené 6 dní. Tedy jediný den, od kterého jsou stejně vzdálené je D. Tento den má být neděle, z čehož vyplývá, že D = dnes = neděle. Při jiném pochopení úlohy mohlo vyjít úterý, uznávali jsme obě možnosti.

Úloha 15

Máme deseticiferné číslo ABCDEFGHIJ, které má všechny cifry různé. Dále platí, že dvojciferné číslo AB je dělitelné 2, BC je dělitelné 3, CD je dělitelné 4 a tak dále až po IJ, které je dělitelné 10. Jaké největší číslo splňuje tyto podmínky?

Řešení 15

Z jednotlivých informací ze zadání postupně dostáváme následující cifry:

- IJ je dělitelné desíti, takže J = 0.
- DE je dělitelné pěti, takže E = 5, protože nula už je obsazená.
- EF, čili 5F, je dělitelné šesti, takže F = 4.
- Kvůli dělitelnosti 8, 6, 4 a 2 musí být cifry H, F, D a B sudé.
- FG, čili 4G, musí být dělitelné sedmi. Takže 4G musí být buď 42, nebo 49, ale sudá čísla už jsou všechna obsazená ciframi B, D, F, H a J, takže G = 9.
- GH, čili 9H, musí být dělitelné osmi, takže H = 6.
- HI, čili 6I, musí být dělitelné devíti, takže I = 3.

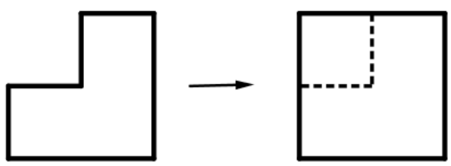
Zatím víme, že naše číslo je ABCD549630. Hledané číslo má být co největší, vyzkoušejme co největší možnost pro cifru A. Tou je 7, protože A musí být liché a 9 už je obsazená. Podobně nejvyšší možností pro cifru B je 8. Z toho dostáváme číslo 78CD549630. D musí být sudé, jediná možnost na vyzkoušení zůstává 7812549630 a lehce si ověříme, že toto číslo splňuje všechny podmínky ze zadání. Hledaným číslem je tedy 7812549630.

Úloha 16

Čtvercová louka se stranou 500 metrů je rozdělená rovnými chodníčky na 625 čtvercových pozemků o rozměrech 20 × 20 metrů. Pan Gardner vyšel z některé křižovatky dvou chodníčků, ušel po chodníčcích okruh dlouhý 1 kilometr (na konci procházky se tedy dostal na stejnou křižovatku, ze které vyrazil). Kolik nejvíc pozemků může být „uzavřených“ vevnitř této okružní cesty pana Gardnera?

Řešení 16

Nejprve je třeba si uvědomit, že dráha, která uzavírá největší možný počet chodníčků musí být konvexní. To znamená, že když úsečkou spojíme kterékoliv dva body uvnitř dráhy, tak tato úsečka nevyjde ven z obkoleseného území. Kdyby byla dráha nekonvexní, tak by bylo možné ji změnit tak, aby uzavírala více pozemků, ale měla stejnou délku (viz obrázek).



Z konvexních tvarů připadají do úvahy jen obdélníky a čtverce, protože pan Gardner se pohybuje jen po chodníčcích. Označme si rozměry hledaného obdélníka (nebo čtverce) 20x a 20y. Násobky 20 jsou nutné proto, že cesta obchází pozemky rozměrů 20 × 20. Podle zadání má mít cesta délku 1 km, tedy má platit $2 \times (20x + 20y) = 1000$, tedy $x + y = 25$. Součin xy má zároveň být co největší, protože určuje počet uzavřených pozemků. Vyzkoušením všech možností dostaneme, že největší součet dává $x = 13$ a $y = 12$, což zodpovídá 156 pozemkům.

Úloha 17

Mezi všemi pěticifernými čísly, která neobsahují cifru 0, najděte takové, pro které je rozdíl tohoto čísla a jeho ciferného součinu co největší.

Řešení 17

Určitě víme, že hledané číslo bude začínat ciframi 99. To proto, že i když si vezmeme nejmenší takové, které zároveň vyhovuje zadání, 99111, rozdíl tohoto čísla a jeho ciferného součinu je 99111 – 81 = 99030. Tento rozdíl je větší než 99000, tím pádem není možné ho překonat žádným číslem menším než 99000, protože druhý člen rozdílu je vždy kladný.
Nyní vyzkoušejme pokračovat tímto způsobem. Další takové číslo je 99911, které má rozdíl 99911–729 = 99182. Opět rozdíl porostl. Přidání další devítky (99991) však již jen uškodí, protože ciferný součin tohoto čísla je 6561, což zmenšuje rozdíl pod 99000, což je očividně horší než to, co již máme. Na posledních dvou místech tedy chceme nechat jedničky. Již víme, že první dvě cifry musí být devět. Zbývá tedy prostřední cifra. Co by se stalo, kdybychom ji nahradili menší cifrou k? Číslo by kleslo o $(9 – k) \times 100$, zatímco ciferný součin by klesl o $(9 – k) \times 81$. Vidíme, že jejich rozdíl by se nutně zmenšil, tedy devítku určitě chceme nechat na třetím místě. 99911 je tedy řešením této úlohy.

Úloha 18

V slově PIKOMAT nahraďte jednotlivá písmena některými různými ciframi od 1 po 9 tak, aby vzniklé sedmiciferné číslo bylo dělitelné 72 a bylo co nejmenší.

Řešení 18

Aby bylo číslo dělitelné 72, musí být dělitelné devíti a osmi. Nejnižší číslo, které můžeme vyzkoušet je 1234567. Toto není dělitelné osmi, takže ho musíme zvýšit. Hned 1234568 je sice dělitelné osmi, ale ne devíti. Postupným přičítáním jedničky se dopracujeme k číslu 1234584, které je dělitelné 72. Tím jsme sice narazili na násobek 72, ale v čísle se opakuje cifra 4, takže zadání nevyhovuje. Když už ale máme násobek 72, můžeme k němu přičítat postupně 72 a ověřovat, zda výsledek má všechny cifry různé. První číslo, které vyhovuje, je 1237896.

Úloha 19

Dům, kde žijí Hugo a Žigo je dlouhý – má několik vchodů. V každém vchodě jsou na každém poschodí 4 byty. Všechny byty v domě jsou očíslované po sobě jdoucími přirozenými čísly. Číslování začíná na prvním poschodí prvního vchodu a končí na nejvyšším poschodí posledního vchodu. Tedy byty na prvním poschodí prvního vchodu mají čísla 1 až 4, na druhém poschodí prvního vchodu 5 až 8, atd. Na přízemí každého vchodu jsou obchody, které nejsou očíslované. Hugo bydlí na pátém poschodí v bytě č. 83 a Žigo bydlí v jiném vchodě na třetím poschodí v bytě č. 169. Kolik poschodí má jejich dům?

Řešení 19

Označme si počet poschodí v domě p. Z toho, že Hugo bydlí na pátém poschodí v bytě číslo 83 vyplývá, že byty 81–84 jsou na pátém poschodí, byty 77–80 na čtvrtém, 73–76 na třetím, byty 69–72 na druhém a byty 65–68 na prvním poschodí. To znamená, že v předešlém schodě číslování končí bytem 64. Tedy 64 musí být dělitelné $4 \times p$, protože $4 \times p$ označuje počet bytů v jednom vchodě. Žigo bydlí na třetím poschodí v bytě 169. Byty 169–172 jsou tedy na třetím poschodí, byty 165–168 na druhém a byty 161–164 na prvním poschodí daného vchodu. Číslování bytů předešlého vchodu tedy končí číslem 160,

takže 160 musí být dělitelné $4 \times p$.
Máme tedy dvě podmínky dělitelnosti: p musí beze zbytku dělit čísla 16 a 40. $16 = 2 \times 2 \times 2 \times 2$ a $40 = 5 \times 2 \times 2 \times 2$, takže p může být jedině 2, 4, nebo 8. Hugo bydlí na pátém poschodí, takže p musí být větší nebo rovné 5, takže zůstává jediná možnost: $p = 8$. Dům má tedy 8 poschodí.

Úloha 20

Ondřej šel po ulici a počítal, kolik ušel kroků. Vyšlo mu pěticiferné číslo, které neobsahuje cifry 0 a 1, ale určitě obsahuje právě jednu cifru 6. Ondřej nám taky prozradil, že v čísle je sudý počet sudých cifer. Druhá až čtvrtá cifra jsou menší než 4 a v čísle existují právě dvě dvojice sousedících stejných cifer. Čtvrtá cifra udává, kolik je v čísle dvojek. Kolik kroků Ondřej napočítal?

Řešení 20

Označme si hledané pěticiferné číslo ABCDE. Vzhledem k tomu, že počet sudých cifer je sudý a celkový počet cifer je pět, sudých cifer v čísle může být jedině nula, dva, nebo čtyři. Protože v čísle se nachází jedna šestka, takže počet sudých cifer je buď dva, nebo čtyři.
Čtvrtá cifra (D) udává počet dvojek v čísle. Protože dvojka je sudá a počet sudých cifer (včetně šestky) je 2, nebo 4, počet dvojek musí být 1, nebo 3. A protože jednička se v čísle ze zadání nenachází, cifra D nemůže být rovná 1, takže D = 3.
V čísle jsou tedy tři dvojky. Kdyby byla jedna z těchto dvojek na místě jednotek (tedy pokud E = 2), číslo ABCDE by muselo být 22332, aby platila podmínka o sousedících dvojicích stejných cifer. Tím pádem by však v něm nebyla šestka, což je nepřípustné, takže E se nerovná 2.
Tím pádem máme jen tři pozice, kam můžeme umístit dvojky – na místa A, B a C. Z hledaného čísla se tedy stává 2223E a protože musí obsahovat cifru 6, dostáváme, že ABCDE = 22236. Lehce ověříme, že toto číslo splňuje všechny podmínky ze zadání, z čehož vyplývá, že jsme našli jediné možné řešení.

Úloha 21

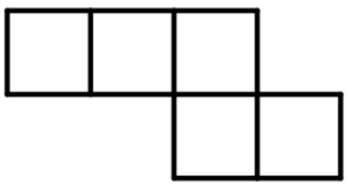
Jeníček se naučil počítat na prstech zvláštním způsobem: Počítal na jedné ruce po jednom. Začínal počítat od palce, přes ukazovák, prostředník a prsteník, přišel k malíčku a měl číslo 5. Hned potom se vracel na prsteník (6), prostředník (7), ukazovák (8), palec (9), zase se vracel na ukazovák (10), prostředník (11) atd. Jednou chtěl napočítat do 2017. Na který prst mu vyšlo číslo 2017?

Řešení 21

V Jeníčkově počítání se neustále opakuje osmičlenná posloupnost prstů: palec (1), ukazovák (2), prostředník (3), prsteník (4), malíček (5), prsteník (6), prostředník (7), ukazovák (8). Číslo 2017 dává po dělení osmi zbytek 1, takže na číslo 2017 vyjde první člen této posloupnosti, tedy palec.

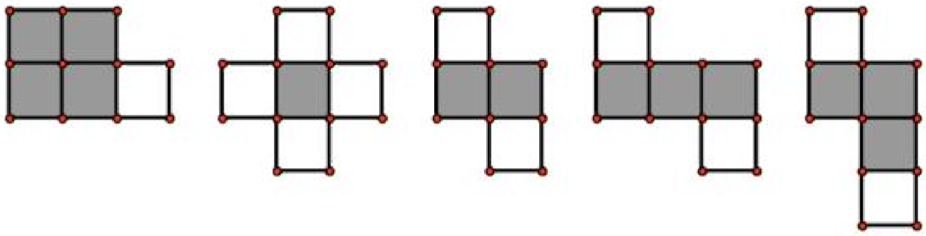
Úloha 22

Každý dílek Honzovy skládačky je složený z pěti stejných čtverečků, které se dotýkají celými hranami. Jeden z nich vidíte na obrázku. Kolik různých dílků takové skládačky existuje? Poznámka: Otočené, nebo překlopené kousky nepovažujeme za různé.



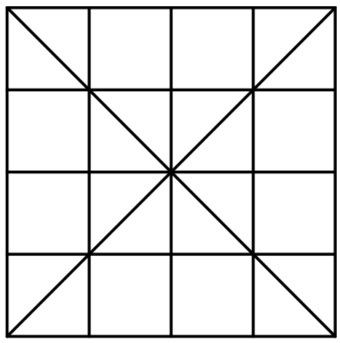
Řešení 22

Začněme tím, že si pojmenujme pár věcí: Kmen budeme říkat čtverečkům, které jsou s jinými spojené alespoň dvěma hranami. List budeme říkat čtverečkům, které jsou spojené s celkem jen jednou hranou. Na obrázku níže vidíme všechna možná uspořádání kmenů. Pro každý z těchto případů zkoušením snadno najdeme počet dílků skládačky, které mají toto uspořádání kmenů. Je jich postupně: 1 + 1 + 3 + 4 + 3 = 12 (ověřte si!). Celkem tedy existuje 12 možností.



Úloha 23

Kolik trojúhelníků je na obrázku?



Řešení 23

Abychom zaručili, že žádný trojúhelník při počítání nevynecháme, potřebujeme na počítání systém. Bez újmy na obecnosti uvažujme, že délka jednoho malého čtverečku je 1 (tedy velikost celého čtverce je 4 × 4). Na obrázku jsou všechny trojúhelníky pravoúhlé. Možné délky stran trojúhelníků jsou 1, 2, 3, 4, a $\sqrt{2}$, $2\sqrt{2}$, $3\sqrt{2}$ a $4\sqrt{2}$. Možné dvojice odvěsen jsou (1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), ($\sqrt{2}$, $\sqrt{2}$), ($2\sqrt{2}$, $2\sqrt{2}$), kterým zodpovídají obsahy 0,5; 2; 4,5; 8; 1 a 4.

Když už víme všechny možné rozměry a obsahy trojúhelníků, můžeme je spočítat: trojúhelníků s obsahem 0,5 je na obrázku 16, s obsahem 1 jsou 4, s obsahem 2 jich je 12, s obsahem 4 jsou 4, s obsahem 4,5 jich je 8 a s obsahem 8 jsou 4. To je dohromady 16 + 4 + 12 + 4 + 8 + 4 = 48 trojúhelníků.

Úloha 24

Kolik z čísel 1 až 10000 má v sobě aspoň jednou cifru 5?

Řešení 24

Vzhledem k tomu, že číslo 10000 neobsahuje žádnou pětku, stačí uvažovat čísla od 1 po 9999. Uvažujme napřed čísla od 1 po 99. V každé desítce (kromě 50–59) je vždy právě jedno číslo s pětkou. V desítce 50–59 obsahuje pětku všech deset čísel. Takže spolu v celé stovce (tedy mezi čísly 1 až 99) obsahuje aspoň jednu pětku 9 × 1 + 10 = 19 čísel.

Nyní uvažujme všechna čísla od 1 po 999. V každé stovce (kromě 500–599) je stejný počet čísel s pětkou jako mezi 1 až 99, tedy 19. V stovce 500–599 je čísel s pětkou 100. Takže spolu v celé tisícovce (tedy mezi

1 až 999) obsahuje pětku 19 × 9 + 100 = 271 čísel.
Na závěr uvažujme čísla od 1 po 9999. V každé tisícovce (kromě 5000–5999) je stejný počet čísel s pětkou jako mezi 1 až 999, tedy 271. V tisícovce 5000–5999 je čísel s pětkou 1000. Takže spolu v celé desetitisícovce (tedy mezi 1 až 9999) obsahuje pětku 271 × 9 + 1000 = 3439 čísel.

Úloha 25

Jedna míle má 5280 stop. Vlakové koleje mají délku 30 stop. Po kolejích jede vlak, jehož rychlost v mílích za hodinu je přirozené číslo. Pokaždé, když kolo vlaku přejede po sváru mezi kolejnicemi, ozve se cinknutí. Železničář Petr jede v tomto vlaku a cinknutí počítá. Kolik sekund musí Petr počítat, aby slyšel stejný počet cinknutí, jako je rychlost vlaku v mílích za hodinu? Poznámka: když vlak přejede po n kolejnicích, Petr napočítá n cinknutí.

Řešení 25

Vzhledem k tomu, že jedna kolejnice má 30 stop, do jedné míle se jich vleze 5280/30 = 176 kolejnic. Nechť je rychlost vlaku v mílích za hodinu n. To znamená, že vlak přejede za hodinu 176n kolejnic. Vlak tedy přejede za 3600 sekund 176n kolejnic, jinak řečeno n kolejnic za 3600/176 sekund. Takže Petr musí poslouchat cinknutí 3600/176 = 20,45 sekund.

Úloha 26

Pepa hodil červenou a modrou hrací kostkou. Ze všech možných výsledků hodů, v kolika případech by byl součin hozených čísel větší než deset?

Řešení 26

Všech možných dvojic čísel, která mohla padnout, je 6 × 6 = 36. Nejjednodušší je vypsat si všechny tyto možnosti a spočítat součiny vyhovující podmínkám ze zadání – součin je větší než deset v 17 případech.

Úloha 27

Čtverec ABCD má stranu AB = 10 cm. Označme jeho střed S. Na straně AB zvolme bod X tak, že délka AX = 7 cm. Na straně BC potom zvolme bod Y tak, aby úhel YSX byl pravý. Jaký obsah má čtyřúhelník XBYS?

Řešení 27

Dokreslíme-li si do obrázku ze zadání body K a L, které jsou po řadě ve středech stran AB a BC, vzniknou dva trojúhelníky: KXS a LYS. U trojúhelníku KXS víme jeho obsah, protože |KX| = 2 cm a |KS| = 5 cm. Označíme-li si úhel BXS α, potom víme, že úhel BYS má 90 – α, protože zbylé dva úhly v čtyřúhelníku BYSX jsou pravé a součet všech úhlů v čtyřúhelníku je 360. Z toho však vyplývá, že velikost úhlu YSL je α, protože YLS je pravý a součet úhlů v trojúhelníku je 180. Podobně víme, že velikost úhlu KXS je 90 – α (protože rovný úhel má 180). Dále víme, že velikost úhlu KSX je α, protože SKX je pravý a součet úhlů v trojúhelníku je 180. Z toho již jednoznačně vyplývá, že trojúhelníky KXS a SYL jsou shodné. Tím pádem mají i stejný obsah. Obsah čtyřúhelníku XBYS je tedy obsah KBLS – obsah KXS + obsah SYL = obsah KBLS = 25 cm^2.

Úloha 28

V našem království prodávají čokoládu, která stojí 10 dukátů. Ke každé čokoládě je přibalený jeden kupón. Za tři tyto kupóny se dá koupit jedna čokoláda. Za jaký nejmenší počet dukátů je možné koupit 500 čokolád?

Řešení 28

Nejdřív ukážeme, že stačí 3340 dukátů. Za ně koupíme 334 čokolád, ve kterých najdeme 334 kuponů. Jeden si odložíme a za zbylých 333 kuponů koupíme 111 čokolád. Tím opět získáme 111 kuponů, za

které koupíme 111 / 3 = 37 čokolád. S nimi dostaneme 37 kuponů, jeden odložíme a za 36 koupíme 12 čokolád, za získaných 12 kuponů 4 čokolády. Nyní máme 4 kupony + 2, které jsme si odložili. Za těchto 6 kuponů koupíme 2 čokolády. 2 kupony nám tedy zůstanou a celkem máme 334 + 111 + 37 + 12 + 4 + 2 = 500 čokolád.
Zbývá dokázat, že za méně peněz koupit 500 čokolád určitě nejde. Jaká je vlastně hodnota čokolády v dukátech? Víme, že platí rovnost: 3K = 1Č + 1K (za tři kupony dostaneme 1 čokoládu a 1 kupón), tedy 2K = 1Č. Dále platí, že 10D = 1Č + 1K (za 10 dukátů dostaneme jednu čokoládu a jeden kupon). Dosadíme-li za 1Č, dostáváme 10D = 3K, tedy 1K = 10/3D. Tedy jeden kupón má hodnotu 10/3 dukátu a čokoláda 20/3 dukátu. 500 čokolád má tedy hodnotu 500 × 20/3 = 3333,33 dukátů. Je zřejmé, že musíme zaplatit alespoň takovou hodnotu, jaká je hodnota čokolády. A vzhledem k tomu, že platíme vždy v násobcích 10 dukátů, nejbližší taková hodnota je 3340 dukátů.

Úloha 29

Najděte nejmenší přirozené číslo, které končí dvojčíslím 56, je dělitelné číslem 56 a jeho ciferný součet je 56.

Řešení 29

Z dělitelnosti 56 hned vyplývá, že požadované číslo musí být dělitelné 7 a 8. Aby bylo hledané číslo dělitelné osmi, musí být i poslední trojčíslí dělitelné osmi. Z toho plyne, že poslední trojčíslí hledaného čísla musí být 256, 456, 656, nebo 856. Zadání zároveň vyžaduje, aby byl ciferný součin roven 56. Protože hledáme nejmenší takové číslo, potřebujeme, aby mělo co nejméně cifer. Toho dosáhneme tak, že použijeme co nejvíce co největších cifer. Poslední trojčíslí tedy bude 856. Ciferný součet 856 je 19, zbývá tedy 56 – 19, zbývá tedy doplnit cifry o ciferném součtu 37. Nejkratší skupina cifer, která toto splňuje, je 1, 9, 9, 9, 9. Číslo 19999856 však není dělitelné sedmi, tedy ani 56. Ciferný součet však již je 56, tedy jediný způsob, jak můžeme dosáhnout dělitelnosti 7 je zmenšením jedné cifry a zvětšením jiné o stejný počet. Na poslední trojčíslí nemůžeme sahat a devítky nejdou zvětšit, zbývá nám jedině zvětšit první cifru 1 a zmenšit nějakou z devítek. Zkusme napřed zvětšit první cifru jen o 1, tedy na 2. Snadno zjistíme, že zmenšením druhé devítky na osm se již číslo 29899856 stane dělitelné sedmi, tedy i 56 a tedy splní všechny podmínky ze zadání.

Úloha 30

Najděte největší přirozené číslo, jehož každé dvě po sobě jdoucí cifry tvoří dvojciferné prvočíslo, přičemž všechna tato prvočísla jsou navzájem různá. Příklad takového čísla je 11731, jelikož 11, 17, 73 a 31 jsou navzájem různá prvočísla.

Řešení 30

Největší číslo požadovaných vlastností je 619737131179. Cesta k němu je například taková: Nejdříve si uvědomíme, že prvočísla začínající ciframi 2, 4, 5, 6, 8 se nemůžou vyskytovat nikde uvnitř hledaného čísla, protože předcházející číslo by nemohlo být prvočíslem. Teda vnitřek hledaného čísla je potřeba vyskládat z těchto prvočísel: 11, 13, 17, 19, 31, 37, 71, 73, 79, 97. Tedy už vidíme, že hledané číslo může mít nejvíce 11 + 1 = 12 cifer, protože jednou můžeme na začátku použít prvočíslo, které začíná 2, 4, 5, 6, nebo 8. Zbývá najít takové pořadí, kde využijeme všechna vypsaná prvočísla. Toto lze zkoušením, které se zjednodušit pomocí dalších úvah (například tak, že si všimneme, kolikrát se jaká cifra může vyskytovat jako počáteční a kolikrát jako koncová).

Úloha 31

Je dané číslo 2017. Připište k němu jednu cifru doleva a jednu doprava tak, aby výsledné číslo bylo co největší a dělitelné číslem 68.

Řešení 31

Co vlastně znamená, že je číslo dělitelné číslem 68? Znamená to, že je dělitelné číslem 4 a zároveň číslem 17. Pravidlo pro dělitelnost 17 sice nemáme, ale pravidlo pro dělitelnost čtyřmi je, že poslední dvojčíslí je dělitelné čtyřmi. Vzhledem k tomu, že dané číslo 2017 končí sedmičkou, jediná čísla, která za něj můžeme přidat jsou 2 nebo 6. Jen při těchto číslech bude výsledné číslo dělitelné čtyřmi.
O poslední cifře tedy již toho víme dost, zaměřme se nyní na první cifru a na dělitelnost 17. Hledáme co největší číslo, vyzkoušejme tedy napřed, zda by první cifra mohla být 9. Zkoušíme tedy, zda 920176 nebo 920172 je dělitelné 17. A máme štěstí, 920176 doopravdy je dělitelné 17. Tím pádem musí být 920176 dělitelné i 68 a je správným řešením tohoto příkladu.

Úloha 32

Kolika nulami bude končit součin 1 × 4 × 7 × ... × 94 × 97 × 100?

Řešení 32

Nula na konci součinu vznikne jen tehdy, pokud ho vynásobíme deseti, resp. pokud ho vynásobíme pěti a dvěma. Stačí tedy spočítat, kolik se v prvočíselném rozkladu všech čísel ze součinu nachází dvojek a pětek a menší z těchto čísel určuje, kolika nulami končí součin (kdyby například v součinu byly 3 pětky a 2 dvojky, tak by vznikly jen dvě desítky). Dvojek bude určitě v součinu více než pětek, protože každé druhé číslo v součinu je sudé, a tady máme k dispozici minimálně 16 dvojek (v praxi ale mnohem méně, ale pokud je pětek méně než 16, tak nás to nemusí mrzet). Stačí tedy, pokud se zaměříme jen na čísla v součinu, která jsou dělitelná pěti.
První takové číslo bude 10. Protože čísla v součinu se zvětšují vždy o 3, nejbližší další číslo, které je dělitelné pěti bude 10 + takový násobek trojky, který je i násobkem pětky. To je 15, tedy další čísla jsou: 10, 25, 40, 55, 70, 85, 100. Spočítejme, kolik v sobě mají pětek: 10 (1), 25 (2), 40 (1), 55 (1), 70 (1), 85 (1), 100 (2), celkem tedy 9 pětek. Více pětek v součinu určitě není a dvojek máme v součinu více než 9, součin tedy bude končit 9 nulami.

Úloha 33

Miška si po úspěšné maturitě přivydělává v průběhu letních prázdnin jako pokladní na koupališti Zlaté Třísky. Prodává návštěvníkům vstupenky s číslem podle toho, kolikátí v pořadí ten den přišli: První návštěvník dostane vstupenku s číslem 1, druhý s číslem 2, atd. V průběhu dne však došel žlutý papír, na který se vstupenky tiskly, a tak musela Miška pokračovat v tištění na červený papír. Za celý den prodala stejný počet žlutých a červených vstupenek. Večer zjistila, že součet čísel na žlutých vstupenkách byl o 1681 menší než součet čísel na červených vstupenkách. Kolik vstupenek ten den prodala?

Řešení 33

Podívejme se, jak vypadají oba součty (žlutý a červený): Žlutý je součet čísel od jedna po nějaké číslo x. Červený je součet od x + 1 po 2x. Napišme si oba součty přehledně pod sebou:
Žlutý: 1 + 2 + 3 + 4 + ... + (x – 2) + (x – 1) + x = Ž
Červený: (x + 1) + (x + 2) + (x + 3) + (x + 4) + ... + (x + x – 2) + (x + x – 1) + (x + x) = Č
Vidíme, že červený součet není nic jiného než žlutý součet, kde jsme se každému z x členů přičetli číslo x. Víme tedy, že Č = Ž + $x \cdot x$. Zároveň však ze zadání víme, že $x \cdot x = 1681$. Snadno zjistíme, že $x = 41$, tedy celkem Miška prodala 82 lístků.

Úloha 34

Maťa, Kája a Simona se zúčastnily závodů. Celkem bylo v jejich kategorii 12 soutěžících. Po skončení neměly holky co dělat, tak počítaly, kolik je možností, jak mohly dopadnout. Maťa si věřila a myslela si, že by mohla skončit v první pětce. Kája si naopak myslela, že závod pokazila, takže skončí mezi posledními čtyřmi. Simona zaslechla organizátory, ale neslyšela je přesně. Věděla však, že bude buď 2., nebo 12. Kolik je možností pořadí všech účastníků, pokud vezmeme do úvahy pocity holek?

Řešení 34

Rozdělme si úlohu na dva případy: 1) Simona byla druhá a 2) Simona byla 12. Pokud by nastal první případ, tak by Maťa byla 1., 3., 4., nebo 5 a Kája by byla 9., 10., 11., nebo 12. Existuje tedy 4 × 4 = 16 možností, jak v tomto případě mohly dopadnout.

Pokud by nastal druhý případ, tak by Maťa byla 1., 2., 3., 4., nebo 5. a Kája by byla 9., 10., nebo 11. Existuje tedy 5 × 3 = 15 možností, jak v tomto případě mohly dopadnout.

Celkem je tedy 15 + 16 = 31 možností, jak mohly dopadnou. Nesmíme však zapomenout i na ostatní závodnice. Ty mohly v rámci zbývajících devíti míst dopadnout jakkoliv, tedy měly 9 × 8 × 7 × 6 × 5 × 4 × 3 × 2 × 1 možností, jak mohly skončit (zamyslete se, proč tomu tak je). Celkem tedy existuje 9 × 8 × 7 × 6 × 5 × 4 × 3 × 2 × 1 × 31 = 11249280 možností.

Úloha 35

V místnosti stojí šest židlí ve dvou řadách po třech židlích. Kolika způsoby na ně můžeme usadit dva studenty z Keplera, dva studenty z Jarošky a dva studenty z Bílovce, pokud žádný student z Keplera nechce sedět vedle žádného studenta z Jarošky?

Řešení 35

Zamysleme se napřed na tímto: Pro každou židli určíme, které škole bude „patřit“ a rozestavíme je podle pravidel ze zadání (tedy „Keplerácké“ a „Jaroškovské“ židle nikdy nebudou vedle sebe). Uděláme-li to, kolika způsoby můžeme na takto určené židle rozesadit konkrétní studenty? Pro každou školu máme 2 možnosti, jak studenty rozesadit na dvě židle, tedy celkem máme 2 × 2 × 2 = 8 možností.

Nyní nám tedy stačí vyřešit o něco jednodušší úlohu, a totiž jak přiřadit židle školám. Výsledek této podúlohy poté jen vynásobíme osmi. Rozdělme si všechny možnosti na dva případy: 1) Oba Kepleráci sedí v stejné řadě a 2) Každý Keplerák sedí v jiné řadě.

V prvním případě máme 2 možnosti, jak vybrat řadu, kde budou Kepleráci sedět. Poté máme 3 možnosti, jak vybrat dvě židle v této řadě, na nichž budou sedět Kepleráci. Tedy celkem 2 × 3 možností. Je zřejmé, že v řadě, kde sedí dva Kepleráci již nemůže sedět nikdo z Jarošky. Ti tedy mají opět 3 možnosti, jak se rozesadit v zbývající řadě. Studenti z Wichterlova gymnázia jen vyplní zbývající prázdné židle, jednu v každé řadě. Celkem je tedy v prvním případě 2 × 3 × 3 = 18 možností.

V druhém případě bude sedět jeden Keplerák v každé řadě. Nemůžou však sedět ani v jedné řadě uprostřed, protože by si již neměli kam sednout studenti z Jarošky. Mají tedy 2 možnosti v každé řadě, celkem tedy 2 × 2 = 4 možnosti, jak si sednout. Studenti z Wichterlova gymnázia opět jen vezmou zbývající židle.

Celkem je tedy (2 × 3 × 3 + 2 × 2) × 2 × 2 × 2 = (18 + 4) × 8 = 22 × 8 = 176 možností, jak studenty rozesadit.

Úloha 36

Máme řadu figurek, kterých je přesně 1000. Jedna z těchto figurek je bílá a všechny ostatní jsou černé. Začneme figurky postupně vyřazovat. Vyřazovat budeme takto: napřed z celé tisícovky vyřadíme ty, které stojí na lichých pozicích. Zůstane tedy 500 figurek. Z nich opět vyřadíme ty, které nyní stojí na lichých pozicích. Takto budeme pokračovat dokud na stole nezůstane poslední, jediná figurka. Na kterou pozici máme na začátku umístit bílou figurku pokud chceme, aby nám zůstala jako ta poslední?

Řešení 36

V prvním kole vyřazování vyřadíme všechny figurky, které stály na pozicích, které nebyly dělitelné dvěma, tedy s čísly 1, 3, 5, ..., 999. V druhém kole zbylé figurky na lichých pozicích. Pokud bychom je však nechali na původních očíslovaných místech, tak bychom vyřazovali figurky s čísly 2, 6, 10, 14, ..., 994, 998, tedy všechny takové, co byly na pozici dělitelné jen dvěma, ale ne čtyřmi. V dalším kole bychom zase vyřazovali figurky na pozicích 4, 12, 20, ..., 988, 996, tedy na pozicích dělitelných čtyřmi, ale ne osmi.

Vidíme, že v každém vyřazovacím kole se zdvojnásobí číslo první figurky, kterou vyřazujeme, a poté jen opakovaně přičítáme dvojnásobek tohoto čísla a vyřazujeme figurky na těchto pozicích. Pokud bychom se tedy podívali jen na číslo první figurky, která bude v každém kole vyřazená, dostaneme 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512 (déle již ne, protože další číslo je 1024, ale takovou figurku již nemáme). V posledním kole tedy začneme tím, že vezmeme figurku s číslem 512. Další figurka, kterou bychom v tomto kole měli vzít, by měla pořadové číslo 512 + 1024 = 1536, ale taková figurka není. Tím pádem toto kolo bude poslední a vezmeme v něm jen poslední figurku, tu, na místě 512. Toto je tedy pozice, kam chceme umístit bílou figurku.

Úloha 37

ABCD je lichoběžník se základnami AB a CD a P je průsečík jeho uhlopříček. Obsah trojúhelníku ABP je 25 cm^2 a obsah trojúhelníku PCD je 16 cm^2. Jaký je obsah celého lichoběžníka v cm^2?

Řešení 37

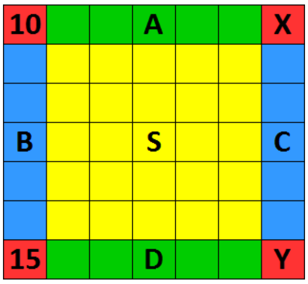
Nakresleme si obrázek ze zadání a označme |AB| = a, |CD| = b, výška trojúhelníku ABP na stranu AB v_a a výška trojúhelníku CDP na stranu CD v_b. Pomocí střídavých úhlů zjistíme, že úhly BAC a ACD mají stejnou velikost a úhly ABC a BDC mají stejnou velikost. Z toho vyplývá, že trojúhelníky ABP a CDP jsou si podobné (mají shodné všechny tři vnitřní úhly, mají však různé rozměry). Z toho, že ABP a CDP jsou si podobné vyplývá, že poměry délek stran a výšek jsou v nich stejné, tedy platí $v_a / v_b = a / b$, což lze také upravit na $av_b = bv_a$. Rovněž také víme, že poměry obsahů jsou $25 / 16 = av_a / b\ v_b$. Dosazením prvního vztahu do druhého dostáváme $25 / 16 = v_a\ v_a / v_b\ v_b$, tedy $5 / 4 = v_a / v_b$, tedy $v_b = 4/5\ v_a$. Obsah lichoběžníku, který chceme zjistit, je $(v_a + v_b)\ (a + b) / 2$. Pokud toto roznásobíme, dostáváme: $av_a / 2 + bv_b / 2 + av_b / 2 + bv_a / 2$. Hodnoty prvních dvou členů výrazu víme, protože to jsou jen obsahy trojúhelníků ABP a CDP. Použitím $av_b = bv_a$ můžeme tyto dva zbývající členy zjednodušit na jeden: av_b. Protože $v_b = 4 / 5\ v_a$, potom $av_b = 4 / 5\ av_a = 8 / 5\ av_a / 2 = 8 / 5 \times 25 = 40$. Celkový obsah lichoběžníku je tedy 16 + 25 + 40 = 81 cm^2.

Úloha 38

Máme čtverečkovou tabulku 7 × 7, která má vepsané číslo v každém políčku. Zároveň platí, že součet čísel v libovolných čtyřech sousedních políčkách, která sdílejí společný vrchol, je v celé tabulce stejný. V levém horním rohovém políčku je přitom číslo 10, v levém dolním rohovém políčku je 15. Jaký je rozdíl čísel vepsaných v pravém horním rohovém a pravém dolním rohovém políčku?

Řešení 38

Rozdělme si tabulku na 8 částí jako na obrázku. Zajímá nás rozdíl X – Y.



Podívejme se nyní na levý vrchní roh a části A, B, S a levý spodní roh a části B, D, S. Ze zadání víme, že jejich součty musí být stejné, protože obsahují obě 9 čtveřic, které musejí mít stejné součty. Platí tedy: 10 + A + B + S = 15 + B + D + S. Úpravou dostaneme 10 + A = 15 + D, což dále umíme upravit na A – D = 5. Podobně pro pravou stranu tabulky dostaneme X + A + C + S = Y + C + D + S, tedy X + A = Y + D, což dále upravíme na A – D = Y – X. Víme však, že A – D = 5, tedy Y – X = 5.

Úloha 39

Matěj a Jakub prodali svoje stádo ovcí. Ovce prodali všechny najednou a za každou ovci dostali tolik eur, kolik mělo celé stádo ovcí. Peníze jim byly vyplaceny v desetieurovkách a mincích. Když si dělili desetieurovky systémem „jednu tobě – jednu mě“, jedna jim zbyla. Matěj navrhl: „Já si vezmu tu zbývající desetieurovku a ty si vezmi všechny mince.“ Jakub však nesouhlasil: „to bych dostal méně než ty!“ A tak Matěj návrh vylepšil: „Tak ti k těm mincím ještě napíšu šek na takovou sumu, abychom se vyrovnali.“ S tím Jakub souhlasil. Na kolik eur byl ten šek?

Řešení 39

O čísle udávajícím počet eur víme:
1) Je to druhá mocnina.
2) Pozůstává z lichého počtu desítek + zbytek, který je menší než 10.
Zaměřme se nyní na druhé mocniny, které mají na místě desítek lichou cifru: 16, 36, 196, 256, ... To nás vede k hypotéze, že pokud má druhá mocnina na místě jednotek cifru 6, je její cifra na místě desítek lichá. Toto snadno dokážeme tak, že si vypíšeme tabulku posledních dvojčíslí druhých mocnin:
01, 04, 09, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 00,
21, 44, 69, 96, 25, 56, 89, 24, 61, 00,
41, 84, 29, 76, 25, 76, 29, 84, 41, 00,
81, 64, 49, 36, 25, 16, 09, 04, 01, 00,
01, 04, 09, 16, 25, ... atd.
Vidíme, že od 5. řádku se již celá posloupnost opět opakuje, což nám zaručuje, že jsme touto tabulkou postihli všechny možnosti. Rovněž vidíme, že platí hypotéza, kterou jsme vytvořili. Tím pádem víme, že počet peněz, který zbyl, je 6 euro. Tím pádem by Jakub dostal o 4 eura méně (6 eur místo 10). Šek tedy musel být na 2 eura (Jakub si polepšil o 2 eura, Matěj pohoršil o dvě, což vyrovnává ona 4 eura).

Úloha 40

Kolik existuje trojciferných čísel, v kterých se žádná cifra neopakuje, a cifra na místě desítek je menší než cifry na místě stovek a jednotek?

Řešení 40

Rozdělme si možnosti podle cifry na místě desítek. Na místě desítek určitě nemůže být cifra 9 ani 8. Největší cifra, která zde může být je 7. Pro 7 existují dvě možnosti, jak může číslo vypadat: 978 a 879. Pokud je na místě desítek cifra 6, je již možností více: Na místě stovek si můžeme vybrat ze tří možností (7, 8, 9) a na místě jednotek, ze dvou (nesmíme si vybrat už tu cifru, kterou jsme si vybrali na místě stovek). Celkem je tedy pro cifru 6 na místě desítek 3 × 2 = 6 možností. Pro cifru pět na místě desítek to bude podobně 4 × 3 = 12 možností, atd. až po cifru jedna na místě desítek, kde to bude 9 × 8 možností. Celkem tedy 2 + 6 + 12 + 20 + 30 + 42 + 56 + 72 = 240 možností.

Úloha 41

Pan Blesk získal nejnovější typ létajícího koberce. Jeho spotřeba při rychlosti x kilometrů za hodinu je jen x/10 litrů kvalitního čínského čaje na 100 kilometrů. Tedy například při rychlosti 28 km/h je to 2,8 litrů na 100 km. Jak daleko od hradu se může nejvíc vzdálit, pokud má být zpátky přesně za hodinu a má jen 1 litr kvalitního čínského čaje? Předpokládáme, že se pan Blesk pohybuje celou dobu stejnou rychlostí.

Řešení 41

Začněme tím, že si vyjádříme lépe spotřebu. Pokud koberec spotřebuje x/10 litrů na 100 km, potom je to to samé jako říct, že spotřebuje x litrů na 1000 km.

Dejme tomu, že by se pan Blesk rozhodl zaletět si 10 km daleko, Potom by musel letět rychlostí 20 km/h, aby byl zpátky za 1 hodinu (musí uletět 10 km tam a 10 km zase zpátky). Tím pádem by jeho spotřeba byla 20 litrů na 1000 km. Protože letěl jen 10 km daleko, spotřeboval by 20 / 1000 = 0.02 litru čaje na kilometr. Uletěl 20 km, takže by spotřeboval 0,4 l čaje. Dobrý pokus, ale ještě nám zbylo 0,6 l čaje, šlo by to určitě lépe.

Zkusme to obecně: Pokud by pan Blesk uletěl x km, musel by letět rychlostí 2x km/h. Potom by měl spotřebu na 1 km: 2x / 1000. Jeho celková spotřeba by byla x × 2x / 1000, tedy $2x^2$ / 1000 litrů. Víme, že pan Blesk má k dispozici 1 litr, tedy $2x^2$ / 1000 = 1. Upravením dostáváme x = $\sqrt{1000}/2$ = 15,81.

Úloha 42

V rovině je několik bodů, každý je buď žlutý, modrý, nebo červený. Z každé barvy je aspoň jeden. Žádné tři body neleží na jedné přímce. Dá se vždy najít takový trojúhelník, jehož vrcholy jsou jeden žlutý, jeden modrý, jeden červený a uvnitř něhož není žádný jiný bod z našich bodů?

Řešení 42

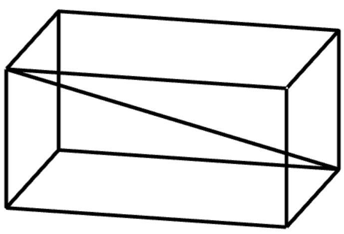
Vyberme si libovolné tři body různých barev. Tyto tři body tvoří trojúhelník. Nyní mohou nastat 2 možnosti:

1) Uvnitř tohoto trojúhelníku se nenachází žádný bod. Potom je podmínka ze zadání jednoduše splněná.

2) Uvnitř tohoto trojúhelníku se nachází bod P barvy B. Potom nám stačí vzít bod P a sestrojit nový trojúhelník, které bude tvořen dvěma vrcholy, které nemají barvu B, z původního trojúhelníku a bodem P. Tím se trojúhelník zmenší, ale stále bude platit, že jeho vrcholy jsou tří různých barev. Možnost 2) se bude opakovat až do doby, než bude platit možnost 1), což se při konečném počtu bodů vždy stane. Tím jsme ukázali, že trojúhelník vyhovující zadání vždy najdeme.

Úloha 43

Kvádr 30 × 40 × 50 cm je rozřezaný na 60 kostek 10 × 10 × 10 cm. Kolika z nich prochází tělesová uhlopříčka kvádru?



Řešení 43

Tělesová uhlopříčka musí projít třemi vrstvami kostek do hloubky, čtyřmi vrstvami kostek do šířky a pěti vrstvami kostek do délky. Protože vrstvy mají stejné rozměry ve všech třech směrech, budou tyto přechody mezi jednotlivými vrstvami naprosto pravidelné. Tedy v 1/3 a 2/3 délky uhlopříčky změní vrstvu do hloubky. V 1/4, 2/4 a 3/4 změní vrstvu do šířky a v 1/5, 2/5, 3/5 a 4/5 změní vrstvu do délky. Protože žádné dva z těchto zlomků nejsou stejné, vždy nastane přechod do jiné vrstvy kostek jen v jednom směru. A při každé změně vrstvy nutně dojde i k změně kostky. Změn je celkem 2 + 3 + 4 = 9, ale musíme ještě započítat kostku, v které začínáme. Dohromady tedy tělesová uhlopříčka projde 10 kostkami.

Úloha 44

Do podniku přišlo oznámení, aby poslali na železniční stanici nákladní auto pro objednanou zásilku o celkové hmotnosti 10 tun. Zboží je balené v bednách, z kterých žádná nemá hmotnost vyšší než 1 tuna. Podnik vlastní auta s nosností 3 tuny. Určete, kolik nejméně aut je třeba poslat na stanici, aby měl podnik jistotu, že auta budou schopná přivézt najednou celou zásilku.

Řešení 44

Na první pohled se zdá, že správné řešení je 4, protože 4 auta pojmou až 12 tun zboží. Toto však nebere do úvahy to, že auta zdaleka nemusí být využita naplno. Představme si například situaci, kdy by každá z beden vážila 10/13 tun. Každé z aut by uvezlo jen 3 takové bedny (protože 4 bedny po 10/13 tunách váží přibližně 3,08 tuny) a tím pádem by bylo třeba poslat pět aut. Stačí však pět aut? Každé auto uveze alespoň 2 tuny. To proto, že pokud by mělo auto naloženo méně než 2 tuny, určitě bychom do něho mohli přidat ještě jednu bednu, která má určitě méně než jednu tunu. Protože tedy máme pět aut po dvou tunách, určitě spolu uvezou aspoň 10 tun nákladu. Tím jsme dokázali, že pět aut vždy bude stačit.

Úloha 45

Jakým nejmenším počtem přímek se dá rovina rozdělit na 1000 částí?

Řešení 45

Toto byl velmi těžký příklad určený pro závěrečné zamyšlení týmům, které se probojovaly až sem!

Je-li na rovině jedna přímka, rozděluje ji na 2 části. Přidáme-li další přímku, různoběžnou s původní přímkou, 2 přímky budou rozdělovat rovinu na 4 části. Co se stane, přidáme-li další přímku, různoběžnou na obě předešlé, která tyto přímky protne ve 2 bodech? Tato přímka bude těmito dvěma body rozdělena na 3 úseky. Každý z těchto úseků rozdělí jinou, již existující, část roviny na dvě nové části. Tím pádem při třech přímkách bude rovina rozdělená na 7 částí.

Představme si situaci, kdy již v rovině je n různoběžných přímek, kde se v žádném bodě neprotínají více než dvě přímky. Přidáme-li další novou přímku, která bude opět různoběžná se všemi přímkami v rovině a nebude procházet žádným průsečíkem dvou přímek, které již v rovině jsou, tato přímka protne ty stávající v n bodech. Tím pádem bude rozdělena na $n + 1$ úseků. Každým tímto úsekem rozdělí již existující část roviny na dvě nové části a tím pádem v rovině přibude $n + 1$ nových částí. Toto je zároveň maximální možné množství přidaných částí, protože nově přidaná přímka nemůže protínat více než n různých částí roviny.

Pokud tedy je v rovině jedna přímka, dělí jí na 2 úseky. Dvě přímky dělí na 2 + 2 = 4 úseky. Tři na 2 + 2 + 3 = 7, čtyři na 2 + 2 + 3 + 4 = 11, pět na 2 + 2 + 3 + 4 + 5 = 16, ... Stačí tuto řadu sčítat až po 45, tedy 2 + 2 + 3 + 4 + 5 + ... + 44 + 45 a dostaneme 1036, což je poprvé, kdy překročíme 1000. Minimální počet přímek nutných na rozdělení roviny na 1000 částí je tedy 45.