Vzorové riešenia MatX 2015

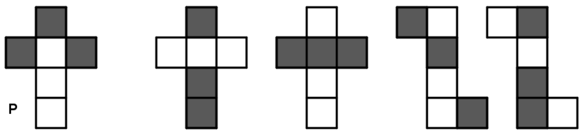
matx.p-mat.sk

11. marca 2015

Úloha 1
Číslo 2015 je súčtom piatich po sebe idúcich prirodzených čísel. Ktoré číslo je najmenším z týchto piatich sčítancov?

Riešenie 1
Päť po sebe idúcich prirodzených čísel vieme zapísať ako $n, n+1, n+2, n+3, n+4$. Zo zadania vieme, že súčet týchto piatich čísel je rovný 2015, teda $n + (n+1) + (n+2) + (n+3) + (n+4) = 2015$. Z toho dostaneme $5n + 10 = 2015$, a teda $n = 401$. Z nášho zápisu tiež vidíme, že číslo n je najmenším z našej pätice sčítancov, takže odpoveď je 401.

Úloha 2
Každá zo sietí na obrázku sa skladá zo šiestich štvorcov, ktoré sú z oboch strán rovnaké. Sieť P poskladáme tak, že vznikne kocka. Koľko zo zvyšných sietí na obrázku sa dá poskladať tak, aby z nich vznikla rovnaká kocka, ako tá zo siete P?



Riešenie 2
Zo všetkých štyroch zvyšných sietí sa dá poskladať rovnaká kocka ako zo siete P.

Úloha 3
Koľko čísel medzi 1 a 2015 (vrátane 1 a 2015) je deliteľných číslom 2, ale nie je deliteľných číslom 7?

Riešenie 3
Počet čísel deliteľných 2 medzi 1 a 2015 je 2015/2 zaokrúhlené nadol = 1007. Týmto sme ale započítali všetky čísla deliteľné dvojkou, takže sme zahrnuli aj niektoré, ktoré sú deliteľné sedmičkou. Také čísla musia byť násobky 14, pretože 14 je najmenšie číslo deliteľné aj dvojkou aj sedmičkou. Násobkov 14 medzi 1 a 2015 je 2015/14 zaokrúhlené nadol = 143. Zostáva teda odčítať 1007 – 143 = 864.

Úloha 4
Hanka si na okraj zošita pod seba začala vypisovať rad čísel: 1999, 2007, 2015, 2023, a tak ďalej. Igor, ktorý sedel vedľa nej, si na okraj zošita začal vypisovať iný rad: 1993, 2004, 2015, 2026, a tak ďalej. Igor a Hanka si všimli, že obaja do svojich zošitov napísali číslo 2015. Ktoré číslo najbližšie po 2015 znova napíšu do zošita obaja?

Riešenie 4
Hanka píše čísla zväčšujúce sa o 8, Igor píše čísla zväčšujúce sa o 11. Najmenší spoločný násobok týchto čísel je $8 \cdot 11 = 88$. Preto keď obaja napísali číslo 2015, tak nasledujúce číslo, ktoré napíšu obaja, bude $2015 + 88 = 2103$. (Hanka sa k nemu dopracuje po 11 krokoch, Igor sa k nemu dopracuje po 8 krokoch.)

Úloha 5
V zásuvke je 30 čiernych, 22 červených a 14 modrých guľôčok. Koľko najmenej ich v tme musíš vybrať tak, aby si mal istotu, že medzi nimi budú dve guľôčky rovnakej farby?

Riešenie 5
Aby sme mali istotu, musíme si uvedomiť, čo by sa stalo v najhoršom možnom prípade. V možnom prípade by sme si mohli vytiahnuť najskôr 3 guľôčky rôznej farby. Štvrtá guľôčka by však už určite musela mať rovnakú farbu, ako jedna z tých, ktoré sme už vytiahli. Takže výsledok je 4.

Úloha 6
Mojmírov pes Havo váži 3/4 svojej hmotnosti, desatinu svojej hmotnosti a ešte 3 kilogramy. Koľko kg váži Havo?

Riešenie 6
Ak je Havova hmotnosť m, vieme, že Havo váži $m = \frac{3}{4}m + \frac{1}{10}m + 3$. Takže $m = \frac{17}{20}m + 3$ a teda $\frac{3}{20}m = 3$, z čoho dostaneme, že $m = 20$. Takže Havo váži 20 kg.

Úloha 7
Nájdite najväčší možný násobok čísla 8, v ktorého zápise sú všetky cifry rôzne.

Riešenie 7
Aby číslo bolo čo najväčšie, musíme použiť čo najviac rôznych cifier, čo sú všetky cifry 0–9. Zároveň by sme chceli čo najväčšie čísla umiestniť čo najviac vľavo, aby výsledné číslo bolo čo najväčšie. Najväčšie také možné číslo by bolo 9876543210, to však bohužiaľ nie je deliteľné 8. Musíme teda vymyslieť, ako ho zmenšiť čo najmenej a zároveň dosiahnuť deliteľnosť 8.

Pravidlo pre deliteľnosť 8 hovorí, že číslo je deliteľné 8, ak jeho posledné trojčíslie je deliteľné 8. Stačí nám teda preskupiť poslednú trojicu čísel tak, aby bola čo najväčšia a zároveň deliteľná 8. Jediné trojciferné číslo zložené z číslic 0, 1, 2 deliteľné 8 je 120, takže výsledné číslo je 9876543120.

Úloha 8
3 rôzne kladné prirodzené čísla majú aritmetický priemer 7. Aké je najväčšie prirodzené číslo, ktoré by mohlo byť jedným z nich?

Riešenie 8

Keďže priemer troch čísel je 7, ich súčet musí byť 21. Aby jedno z čísel bolo čo najväčšie, ostatné dve čísla musia byť čo najmenšie, takže tieto dve čísla musia byť 1 a 2. Keďže 21 – (1 + 2) = 18, vidíme, že najvyššie možné číslo je 18.

Úloha 9

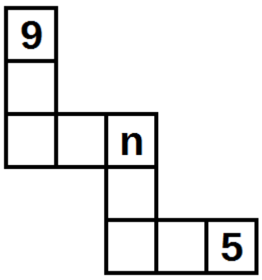
31. december 2014 bola streda. Koľko dní z roku 2014 bola streda?

Riešenie 9

Rok 2014 nebol prestupný, takže mal 365 dní, čo je 52 týždňov a 1 deň. 31. december 2014 bola streda, takže pred ňou bolo 52 týždňov, ktoré začínali stredou a končili utorkom. Tým pádom mal rok 2014 spolu 52 + 1 = 53 stried.

Úloha 10

Števko našiel v časopise hlavolam, ktorý je nakreslený na obrázku. Do štvorčekov má doplniť čísla od 1 po 9 (každé práve raz) tak, aby súčet v každom riadku s tromi políčkami a v každom stĺpci s tromi políčkami bol 13. Ferko už do hlavolamu doplnil čísla 5 a 9. Aká bude hodnota čísla n po doplnení všetkých štvorčekov?



Riešenie 10

Aby bol v najľavejšom stĺpci súčet 13, musia byť pod deviatkou dve čísla so súčtom 4. Keďže každé číslo môže Števko použiť len raz, prichádza do úvahy jedine dvojica čísel 1 + 3 (zatiaľ nevieme, ktoré bude kde).

Následne takou istou úvahou prídeme na to, že v najspodnejšom riadku musí byť dvojica čísel 2 + 6 (tiež zatiaľ nevieme, ktoré presne kde). Na prostredné tri políčka hlavolamu teda Števkovi ostávajú čísla 4, 7 a 8.

Predstavme si, že Števko čísla v spodnom riadku usporiada v poradí 6-2-5. Tým pádom by teraz potreboval do stĺpca nad šestku doplniť dve čísla so súčtom 7. S dostupnými číslami 4, 7 a 8 sa mu to však zjavne nikdy nepodarí. Takže usporiadanie spodného riadku 6-2-5 bolo zlé. Števko teda usporiada spodný riadok 2-6-5. Teraz potrebuje v stĺpci nad dvojkou dve čísla so súčtom 11, a tak je jasné, že tam budú čísla 4 + 7 (zatiaľ nevieme, ktoré kde).

Veľmi podobne to bude s ľavým stĺpcom: usporiadanie (zhora dole) 9-1-3 sa neosvedčí, pretože riadok začínajúci trojkou sa nebude dať doplniť do súčtu 13. Števko teda ľavý stĺpec usporiada 9-3-1 a do riadku začínajúceho jednotkou bude potrebovať ešte čísla 4 + 8. Števko teda už vie, že v riadku, kde je *n*, musia byť čísla 1 + 8 + 4 a v stĺpci, kde je *n*, musia byť čísla 2 + 4 + 7. Spoločná je jedine štvorka, a tak je jasné, že musí byť *n* = 4.

Úloha 11

Ktoré z nasledujúcich čísel sa rovná presnému počtu sekúnd, ktoré uplynú za šesť týždňov?

a) $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9$
b) $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10$
c) $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 11$
d) $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 11 \cdot 12$
e) $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 11 \cdot 12 \cdot 13$

Riešenie 11

Počet sekúnd za 6 týždňov je (6 týždňov)·(7 dní)·(24 hodín)·(60 minút)·(60 sekúnd) . Teda $6 \cdot 7 \cdot 24 \cdot 60 \cdot 60 = (2 \cdot 3) \cdot 7 \cdot (2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3) \cdot (2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5) \cdot (2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5) = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10$.

Úloha 12

Koľko rôznych trojuholníkov s celočíselnými dĺžkami strán má obvod 7? Dva trojuholníky považujeme za rôzne iba ak majú rôzne dĺžky strán, teda na otočení nezáleží.

Riešenie 12

Sú štyri spôsoby, ktorými možno rozložiť 7 na súčet troch kladných celých čísel: $7 = 1+1+5 = 1+2+4 = 1+3+3 = 2+2+3$. Nie všetky tieto trojice však spĺňajú trojuholníkovú nerovnosť: $1 + 1$ je menej ako 5 a $1 + 2$ je menej ako 4, takže trojice 1, 1, 5 a 1, 2, 4 nedávajú trojuholníky. Naopak, trojice 1, 3, 3 a 2, 2, 3 trojuholníkovú nerovnosť spĺňajú, takže trojuholníky s obvodom 7 a s celočíselnými dĺžkami strán existujú 2.

Úloha 13

Číslo je symetrické, ak je rovnaké pri čítaní zľava aj sprava. Číslo je nesymetrické, ak nie je symetrické. Ak čísla nezačínajú nulou, koľko existuje nesymetrických trojciferných čísel?

Riešenie 13

Každé nesymetrické trojciferné číslo môžeme dostať tak, že na miesto stoviek si vyberieme hociktorú cifru okrem nuly, na miesto desiatok hociktorú cifru a na miesto jednotiek hociktorú cifru okrem tej, ktorá už je na mieste stoviek. Na miesto stoviek teda vyberáme z 9 cifier (1–9), na miesto desiatok vyberáme z 10 cifier (0–9) a na miesto jednotiek vyberáme z 9 cifier (0–9 okrem cifry na mieste stoviek). Všetkých možných nesymetrických čísel je teda $9 \cdot 10 \cdot 9 = 810$.

Úloha 14

Tomáš si z kociek veľkosti $1 \times 1 \times 1$ poskladal kocku veľkosti $10 \times 10 \times 10$ a natrel ju lepidlom SuperStick. Kým však SuperStick stihol zaschnúť, prišla do izby Tomášova mladšia sestra, celú vonkajšiu vrstvu kocky odlepila a kocky z nej si zobrala na hranie. Koľko kociek Tomášova sestra odlepila?

Riešenie 14

Keby Tomáš postavil kocku veľkosti $3 \times 3 \times 3$, po odlepení vonkajšej vrstvy by zostala jediná kocka veľkosti $1 \times 1 \times 1$. Podobne, keby Tomáš postavil kocku veľkosti $4 \times 4 \times 4$, po odlepení vonkajšej vrstvy by zostala kocka veľkosti $2 \times 2 \times 2$. Na týchto menších veľkostiach si môžeme všimnúť, že po odlepení vonkajšej vrstvy vždy zostane kocka s hranou o dva kratšou, ako bola hrana pôvodnej kocky. Takže keď Tomášova sestra odlepila celú vonkajšiu vrstvu kocky, Tomášovi zostala kocka veľkosti $8 \times 8 \times 8$. Tomášova sestra teda odlepila $10 \cdot 10 \cdot 10 - 8 \cdot 8 \cdot 8 = 1000 - 512 = 488$ kociek.

Úloha 15

Pani Usmievavá mieša 2 druhy limonády v pomere 1:1. Kohútik s prvým druhom limonády naplní polovicu suda za 6 minút, kohútik s druhým druhom limonády naplní druhú polovicu suda za 10 minút. Za koľko minút sa naplnia dve tretiny suda oboma kohútikmi pustenými naraz?

Riešenie 15

Prvým kohútikom pani Usmievavá naplní celý sud za 12 minút, druhým za 20 minút. Teraz sa musíme pozrieť na to, akou rýchlosťou jednotlivé kohútiky napúšťajú sud. Pokiaľ je veľkosť sudu K, prvý kohútik napúšťa rýchlosťou $K/12$, druhý kohútik rýchlosťou $K/20$. Tým pádom spoločná rýchlosť oboch kohútikov je $K/12 + K/20 = 2K/15 = K/7,5$. Takže oba kohútiky spoločne by celý sud naplnili za 7,5 minúty. My však chceme naplniť len dve tretiny, takže $2/3 \cdot 7,5 = 5$ minút.

Úloha 16

Magdaléne sa podarilo zistiť, že jej rodičia schovávajú jej darček k narodeninám v rodinnom sejfe. Vie, že prístupový kód do sejfu tvorí také štvorciferné číslo, ktorého devätina je opäť štvorciferné číslo zapísané tými istými ciframi, ale v opačnom poradí. Aký je prístupový kód?

Riešenie 16

Zapíšme si kód sejfu ako $ABCD$ (kde A, B, C a D označujú jednotlivé cifry daného čísla). Zo zadania vieme, že $9 \cdot DCBA = ABCD$. Ako prvé si môžeme všimnúť, že $D = 1$, pretože hocijaké vyššie číslo by sa po vynásobení deviatimi stalo päťciferným. A keďže $9 \cdot 1CBA = ABC1$, musí platiť, že $A = 9$.

Podobne sa môžeme zamyslieť aj nad cifrou C. Ak by cifra $C \geq 2$, dostali by sme $9 \cdot 1CBA \geq 9 \cdot 1200 = 10800$, čo má 5 cifier. Takže C sa musí rovnať buď 0 alebo 1. Keby platilo $C = 1$, muselo by platiť $9 \cdot 11B9 = 9B11$, takže $9 \cdot B + 8$ by muselo končiť jednotkou. Teda $9 \cdot B$ by muselo končiť trojkou, takže $B = 7$. Ale $9 \cdot 1179 = 10611 \neq 9711$. Takže C nie je 1, ale $C = 0$. Potom $9 \cdot B + 8$ musí končiť 0, takže $B = 8$ a dostaneme $9 \cdot 1089 = 9801$. Prístupový kód sejfu je teda 9801.

Úloha 17

Vieme, že súčet trinástich rôznych prirodzených čísel väčších ako nula je 92. Zistite súčet najväčších dvoch z týchto čísel.

Riešenie 17

Skúsme si spočítať najmenší možný súčet 13 po sebe idúcich čísel: $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 + 11 + 12 + 13 = 91$. To je o jeden menej, než potrebujeme. Pokiaľ ale zmeníme číslo 13 na 14, dostaneme správny súčet 92. Toto je jediný spôsob ako dostať 92 podľa požiadaviek zo zadania, pretože ak v súčte zmeníme hociktoré iné číslo ako 13 na číslo o jedna väčšie, dostaneme v súčte dve rôzne čísla, čo je zakázané. Takže našli sme jediné riešenie a súčet dvoch najväčších sčítancov je $12 + 14 = 26$.

Úloha 18

Koľkokrát od rána 9:00 do rána 9:00 druhého dňa predbehne minútová ručička hodinovú?

Riešenie 18
Pozrime sa na to, čo sa stane za prvú hodinu. Od 9:00 do 10:00 musí minútová ručička prejsť celý okruh a hodinová ručička sa musí presunúť z číslice 9 na číslicu 10. Minútová ručička teda hodinovú určite cestou jeden raz predbehne (nikde medzi číslicami 9 a 10). Rovnako to je aj medzi 10:00 a 11:00 – minútová ručička musí predbehnúť hodinovú niekde medzi číslicami 10 a 11.

Situácia je rovnaká počas všetkých hodín za deň, okrem hodín 11:00–12:00 a 23:00–24:00. Medzi 11:00 a 12:00 sa hodinová ručička posúva z číslice 11 na 12 a na 12 sa dostane presne o 12:00. Ale minútová ručička sa na 12 tiež dostane presne o 12:00, takže medzi 11:00 a 12:00 minútová ručička nepredbehne hodinovú ani raz. Rovnako je to medzi 23:00 a 24:00.

Takže minútová ručička predbehne hodinovú 24 – 2 = 22 krát za deň.

Úloha 19
Ktoré z nasledujúcich čísel je bezo zvyšku deliteľné 9?
a) $10^{2015} + 5$
b) $10^{2015} + 6$
c) $10^{2015} + 7$
d) $10^{2015} + 8$
e) $10^{2015} + 9$

Riešenie 19
Riešenie 1. Číslo je deliteľné 9 práve vtedy, ak je jeho ciferný súčet deliteľný 9. Samotné mocniny „10 na niečo“ sú čísla zapísané v tvare 1000..., čiže „jednotka a niekoľko núl“. Tým pádom ciferný súčet všetkých takýchto čísel musí byť vždy 1. Potom už len pripočítame jednociferné číslo podľa možností a), b), c), d), e) ... V možnosti d) dostaneme ciferný súčet 1 + 8 = 9, čo je jediný ciferný súčet deliteľný 9.

Riešenie 2 (bez znalosti o cifernom súčte). Mocniny „10 na niečo“ sú čísla zapísané v tvare 1000..., čiže „jednotka a niekoľko núl“. To sa však dá zapísať aj ako 1+99999..., čiže „jedna plus číslo zložené zo samých deviatok“. Keďže číslo zložené zo samých deviatok je zjavne vždy deliteľné 9, potom číslo 1 + 99999... dáva po delení 9 zvyšok 1. Tým pádom potrebujeme pričítať ešte 8, aby sme dostali 8 + 1 + 99999... = 9 + 99999..., čo bude opäť deliteľné deviatimi.

Úloha 20
Aká je hodnota nasledujúceho súčinu (1 + 1/2) · (1 + 1/3) · (1 + 1/4) · ... · (1 + 1/2014) · (1 + 1/2015)?

Riešenie 20
Keď si súčet v každej zátvorke prevedieme na zlomok so spoločným menovateľom, dostaneme výraz

$$\frac{3}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{5}{4} \cdot \ldots \cdot \frac{2015}{2014} \cdot \frac{2016}{2015}$$

Vidíme, že sa vždy čitateľ jedného zlomku vykráti s menovateľom nasledujúceho zlomku, až nakoniec ostane iba menovateľ z prvého zlomku a čitateľ z posledného zlomku, teda 2016/2 = 1008.

Úloha 21
Faktoriál prirodzeného čísla *n* (zapisujeme *n*!) vypočítame ako súčin všetkých prirodzených čísel od 1 po *n*. Miško si vypočítal faktoriály postupne pre čísla 1, 2, 3, …:
1! = 1
2! = 2
3! = 6
4! = 24
5! = 120
6! = 720
…
Miško si všimol, že pri prvých štyroch číslach končí faktoriál daného čísla 0 nulami a od päťky končí 1 nulou. Miško sa zamyslel, zamysli sa aj Ty: Aký bude najmenší počet núl, ktorým faktoriál žiadneho čísla končiť nebude?
Riešenie 21
Prvočíselný rozklad 5! obsahuje jednu päťku a tri dvojky, ktoré spolu vytvoria jednu desiatku – a teda 5! bude končiť 1 nulou. Oproti číslu 5! nemajú čísla 6!, 7!, 8!, 9! žiadne päťky navyše, takže všetky budú končiť rovnakým počtom núl ako 5!, teda jednou nulou. Číslo 10! už má jednu päťku naviac (lebo má jednu desiatku naviac a $10 = 2 \cdot 5$), takže sa skombinuje s niektorou dvojkou z prvočíselného súčinu 10! a 10! bude mať na konci tým pádom o jednu nulu viac 5!, teda dve nuly.

Podobne môžeme postupovať aj ďalej a môžeme si teda všimnúť, že počet núl na konci sa vždy zvýši, keď sa dostaneme k faktoriálu čísla, ktoré je násobkom 5. Takže sa zvýši pri 5, 10, 15, 20, 25, 30, …, teda pri násobkoch päťky. Ak by sa počet pätiek zvýšil vždy o jednu, faktoriál by mohol končiť hocikoľkými nulami. Ale pozor! Počet núl sa vždy zvýši o toľko núl, o koľko viac pätiek má faktoriál daného násobku päťky oproti tomu predošlému.

Všetky násobky päťky od 5 po 20 obsahujú jednu päťku, takže počet pätiek vo faktoriálne sa pri týchto násobkoch vždy zvýši o jednu. No 25 už obsahuje dve päťky (keďže $25 = 5 \cdot 5$), takže počet pätiek faktoriálu 24! (čo je 4) sa zvýši o dve. Takže 25! končí šiestimi nulami. Keďže počet núl na konci faktoriálov sa nikdy nezníži, z tohto vyplýva, že faktoriál žiadneho čísla nekončí piatimi nulami, takže správna odpoveď je 5.

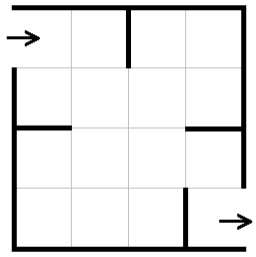
Úloha 22
Rasťo má zbierku 100 žltých a 100 červených kociek s hranou dĺžky 1. Jedného dňa chce Rasťo postaviť zo svojich kociek jednu veľkú kocku veľkosti $3 \times 3 \times 3$ tak, aby sa žiadne dve kocky tej istej farby nedotýkali ani jednou stenou. Aký je rozdiel medzi najväčším a najmenším možným počtom červených kociek, ktoré Rasťo na stavbu takejto kocky môže použiť?
Riešenie 22
Výsledná kocka sa bude skladať z troch vrstiev s deviatimi malými kockami rozmeru $1 \times 1 \times 1$. Pozrime sa na jednu takúto vrstvu: pokiaľ stredná kocka bude mať nejakú farbu, jej štyri susedné kocky budú musieť mať opačnú farbu. Tým pádom ale budú musieť mať rohové kocky zase rovnakú farbu ako tá prostredná. V každej vrstve teda bude 5 kociek jednej farby a 4 kocky druhej farby.

Toto platí pre každú vrstvu, pričom vonkajšie vrstvy budú mať rovnaké zafarbenie a stredná vrstva bude mať opačné zafarbenie. Takže z jednej farby použijeme $5+4+5 = 14$ a z druhej farby $4+5+4 = 13$ kociek.

Rasťo teda pri stavbe môže použiť 14 alebo 13 červených kociek, rozdiel medzi najväčším a najmenším počtom červených kociek, ktoré môže použiť je teda 1.

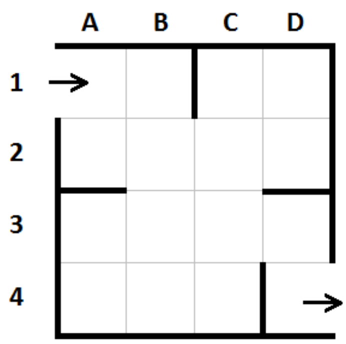
Úloha 23

Myška Miška má vo svojom teráriu bludisko ako na obrázku. Ak sa Miška môže pohybovať z políčka na políčko len doprava, doľava, hore a dole a každé políčko môže navštíviť najviac raz, koľkými rôznymi cestami môže prejsť bludisko?



Riešenie 23

Ak si jednotlivé políčka bludiska pomenujeme ako na obrázku, štartovné políčko je A1 a cieľové D4. Všimnime si, že pri svojej ceste Miška určite musí prejsť políčkami B2 a C3. Do políčka B2 sa Miška z A1 môže dostať dvoma spôsobmi (A1-A2-B2 alebo A1-B1-B2). Z políčka B2 sa do C3 môže dostať štyrmi spôsobmi (B2-B3-C3, B2-C2-C3, B2-B3-B4-C4-C3 alebo B2-B3-A3-A4-B4-C4-C3). Z políčka C3 do políčka D4 vedie len jedna cesta. Takže spolu má myška Miška 2 · 4 · 1 = 8 spôsobov, ktorými môže prejsť cez bludisko.



Úloha 24

Štyria súrodenci, Adam, Barbora, Cilka a Daniel, sa jedného dňa dohodli, že sa rozdelia na pravdovravných a klamárov. Klamári počas celého dňa vždy budú klamať a pravdovravní budú vždy hovoriť pravdu. V ten deň na obed povedali svojej mame:

Adam: Presne jeden z nás klame.

Barbora: Presne dvaja z nás klamú.

Cilka: Počet klamárov je párne číslo.

Daniel: Počet klamárov je nepárne číslo.

Koľko najmenej súrodencov v daný deň klamalo?

Riešenie 24
Skúsme si postupne prejsť jednotlivé možnosti toho, koľko detí klamalo. Čo keby bolo 0 klamárov? Potom by Adam klamal, čo je nezmysel, pretože by sme tým získali jedného klamára. Takže 0 klamárov nemôže byť. Čo keby bol klamár 1? Potom Adam hovorí pravdu, Barbora klame, Cilka klame a tým už máme dvoch klamárov, čo je znovu nezmysel. Takže 1 klamár nemôže byť. Čo keby boli klamári 2? Potom Adam klame, Barbora hovorí pravdu, Cilka hovorí pravdu a Daniel klame. Všetko sedí, takže odpoveď je 2.

Úloha 25
Koľkými spôsobmi sa dajú vybrať tri vrcholy pravidelného 11-uholníka tak, aby tvorili rovnoramenný trojuholník? Poznámka: trojuholníky rozlišujeme iba podľa dĺžok strán, takže na ich otočení nezáleží.

Riešenie 25
Očíslujme si vrcholy 11-uholníka číslami od 1 po 11 v smere hodinových ručičiek. Budeme konštruovať rovnoramenné trojuholníky *ABC*, kde strany *AB*, *AC* budú ramená a *BC* bude základňa trojuholníka. Zvoľme si najskôr bod *A* – nech leží v bode 1. Ak spočítame všetky rovnoramenné trojuholníky s vrcholom *A* v bode 1, dostaneme celkový počet rovnoramenných trojuholníkov. Toto platí, pretože ak je bod *A* v inom bode ako 1, celý trojuholník môžeme natočiť tak, aby sa bod *A* dostal do bodu 1.

Všimnime si ďalej ešte aj to, že bod *B* si môžeme zvoliť tak, aby vždy ležal v niektorom z bodov 2, 3, 4, 5, 6 (takže bod *C* bude ležať v niektorom z bodov 7, 8, 9 , 10, 11). Keby sme totiž vyberali bod *B* z bodov 2–11, každý trojuholník by sa opakoval dvakrát – raz označený ako *ABC* a raz ako *ACB*.

Keďže chceme zostrojiť rovnoramenný trojuholník, keď si vyberieme bod *B*, pozícia bodu *C* bude jednoznačne určená, aby dĺžky ramien *AB* a *AC* boli rovnaké. Bod *B* si môžeme vybrať z 5 vrcholov, takže rôznych rovnoramenných trojuholníkov vieme zostrojiť 5.

Úloha 26
Prehliadky múzea sa zúčastnilo 30 ľudí a spolu zaplatili 40 eur. Vstupné pre dospelých je 2 eurá, pre deti 1,5 eura, pre dôchodcov 1 euro. Okrem toho ešte vieme, že detí bolo na prehliadke dvakrát viac než dôchodcov. Koľko bolo na prehliadke dospelých?

Riešenie 26
Riešenie 1 (bez znalosti sústav rovníc). Keby sa prehliadky zúčastnili len dospelí, zaplatili by spolu $2 \cdot 30 = 60$ eur, čo je priveľa. Takže dospelých určite muselo byť menej, pretože deti a dôchodcovia platia menej. Keď nejaký počet dospelých nahradíme deťmi alebo dôchodcami, celková suma zaplatená za lístky sa zmenší.

Detí do múzea určite musel prísť párny počet, pretože suma zaplatená za lístky je celé číslo. Najmenší počet detí, ktorými môžeme nahradiť dospelých je 2 (aby počet detí bol párny) a na každé dve deti pripadá jeden dôchodca (aby počet detí bol dvakrát väčší ako počet dôchodcov). Skúsme teda 27 dospelých, 2 deti a 1 dôchodcu. Zaplatili by spolu $27 \cdot 2 + 2 \cdot 1,5 + 1 \cdot 1 = 58$. Vidíme teda, že ak nahradíme 3 dospelých dvoma deťmi a jedným dôchodcom, znížime cenu o dve eurá.

Pretože pri 30 dospelých potrebujeme cenu znížiť o 60-40 = 20 a na každé zníženie o dve eurá pripadajú dvaja dospelí, tak musíme znížiť počet dospelých o $(20/2) \cdot 3 = 30$. Takže na prehliadke bolo 20 detí a 10 dôchodcov. Skúška: $20 \cdot 1,5 + 1 \cdot 10 = 40$.

RIEŠENIE 2 (pomocou sústav rovníc). Označme si počet dôchodcov ktorí navštívili múzeum ako a, a počet dospelých ako b. Počet detí je $2a$, pretože detí múzeum navštívilo dvakrát viac ako dôchodcov. Keďže všetkých prišlo do múzea 30, musí platiť $a + 2a + b = 30$, teda $3a + b = 30$.

Vieme, že celková suma zaplatená za vstupenky do múzea je 40 eur a poznáme aj ceny jednotlivých lístkov. Takže musí platiť $1 \cdot a + 1,5 \cdot 2a + 2 \cdot b = 40$, teda $4a + 2b = 40$. Dostávame teda sústavu dvoch rovníc o dvoch neznámych, ktorej riešením je $a = 10$ a $b = 0$. Do múzea teda prišlo 10 dôchodcov, 20 detí a 0 dospelých.

Úloha 27

Z piatich jednotiek, piatich dvojok, piatich trojok, piatich štvoriek a piatich pätiek zostavte päť navzájom rôznych päťmiestnych čísel tak, aby ich súčet bol čo najväčší. Aký je tento súčet?

Riešenie 27

Všetky päťky chceme použiť vo všetkých piatich číslach na prvom mieste, teda na mieste desaťtisícok. Tým pádom dostaneme aspoň 250 000. Rovnaký trik môžeme urobiť aj so štvorkami, takže každé z piatich čísel bude v tvare 54*xyz*. Keď sa však pokúsime ten istý trik zopakovať aj na trojke, zasekneme sa, pretože čísla 1 a 2 na miesta desiatok a jednotiek môžeme rozložiť len štyrmi rôznymi spôsobmi: 11, 12, 21, a 22.

Tým pádom môžeme vytvoriť prvé štyri čísla: 54322, 54321, 54312, 54311. Teraz nám zostali čísla 1, 2, 3, ale trojku už na miesto stoviek dať nemôžeme, lebo všetky čísla musia byť rôzne. Najväčšie číslo, ktoré s takýmto obmedzením dosiahneme je 54231 a vtedy celkový súčet bude $54322 + 54321 + 54312 + 54311 + 54231 = 271497$.

Úloha 28

Spustíme stopky ráno medzi ôsmou a deviatou hodinou v momente, keď sa veľká a malá ručička hodín ocitnú na opačných polpriamkach. Stopky zastavíme medzi jedenástou hodinou a poludním opäť v momente, keď sa ručičky hodín ocitnú na opačných polpriamkach. Určte, koľko minút namerali stopky (na celé minúty). Poznámka: Hodiny idú tak, že minútová ručička skočí každú minútu o jeden dielik, hodinová ručička skočí každých 12 minút o jeden dielik.

Riešenie 28

Pozrime sa, ktoré čísla na hodinách ležia na opačných polpriamkach (za čísla teraz považujeme minútové čiarky). Sú to dvojice (0, 30), (1, 31), (2, 32), ..., (29, 59). Vidíme teda, že vždy po odčítaní 30 dostaneme pozíciu na opačnej polpriamke.

Ráno bude situácia vyzerať tak, že od 8:00 do 8:11 bude hodinová ručička na pozícii 40, v 8:12 až 8:23 na pozícii 41, 8:24 až 8:35 na pozícii 42 atď. My však chceme, aby pozícia hodinovej ručičky mínus 30 dávala pozíciu minútovej ručičky. Tým pádom o 8:10 nastane ráno prvá doba, kedy hodinová a minútová ručička budú na opačných polpriamkach, pretože 40-30 = 10 a my sme ukázali, že tento prípad nastane.

Ako to bude vyzerať pred poludním? Hodinová ručička sa bude posúvať od 55 k 59 a minútová od 0 do 59. Teda od 11:00 do 11:11 bude hodinová na 55, 11:12 až 11:23 bude hodinová na 56, 11:24 až 11:35 bude hodinová na 57. A teraz vidíme, že 57 – 30 = 27, opäť sme teda našli prípad, kedy ručičky ležia na opačných polpriamkach.

A koľko času uplynulo od 8:10 do 11:27? 50 + 60 + 60 + 27 = 127 minút.

Úloha 29

Rozdeľte kocku s hranou 80 cm na menšie zhodné kocôčky tak, aby súčet ich povrchov bol päťkrát väčší ako povrch pôvodnej kocky. Aký bude objem malej kocôčky?

Riešenie 29

Označme ako N počet kocôčok na ktoré pôvodnú kocku rozdelíme a označme stranu dĺžky malej kocôčky a. Potom platí $a \cdot a \cdot a \cdot N = 512000 = 80 \cdot 80 \cdot 80$, keďže objem pôvodnej kocky rozdelíme na N menších kocôčok s objemom $a \cdot a \cdot a$. Takisto musí platiť $6 \cdot a \cdot a \cdot N = 384000 \cdot 5$, keďže povrch pôvodnej kocky je $6 \cdot 80 \cdot 80 = 384000$ a povrch malej kocôčky je $6 \cdot a \cdot a$. Druhá rovnica sa dá upraviť na $a \cdot a \cdot N = 32000$.

Z tohto už nám stačí vydeliť len dve čísla: $a = \frac{a \cdot a \cdot a \cdot N}{a \cdot a \cdot N} = 512000/32000 = 16$. Takže dĺžka hrany malej kocôčky je 16, z čoho vyplýva, že jej objem je $16 \cdot 16 \cdot 16 = 4096\ cm^3$.

Úloha 30

Koľkými spôsobmi si Kaja, Kika a Katka môžu rozdeliť 33 rovnakých čokolád tak, aby niektoré dve z nich mali spolu dvakrát toľko ako tretia?

Riešenie 30

Podľa podmienok zo zadania musel mať jedna z kamarátok 11 čokolád a zvyšné dve 22. Dve kamarátky, ktoré mali spolu 22 čokolád si ich mohli rozdeliť 23 spôsobmi (mohli si ich rozdeliť ako 0 a 22, 1 a 21, 2 a 20, a tak ďalej až po 22 a 0).

Tá kamarátka, ktorá mala 11 čokolád mohla byť hociktorá z troch dievčat. Takže celkový počet možností ešte musíme vynásobiť troma a dostaneme 69 možností. Ale pozor, možnosť, kedy majú všetky kamarátky po 11 čokolád sme započítali trikrát, takže ešte musíme odčítať 2. Spolu teda existuje 67 spôsobov rozdelenia čokolád.

Úloha 31

Nájdite najmenšie kladné celé číslo deliteľné číslom 720, ktoré sa skladá len z cifier 0 a 1. Poznámka: Pravidlo pre deliteľnosť 9 hovorí, že „číslo je deliteľné 9 ak je jeho ciferný súčet deliteľný 9“.

Riešenie 31

Číslo $720 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 3 = 16 \cdot 5 \cdot 9$ Najskôr si zaistime deliteľnosť 9. Pravidlo pre deliteľnosť 9 hovorí, „číslo je deliteľné 9 ak je jeho ciferný súčet deliteľný 9“. Takže aby sme si zaistili deliteľnosť 9, číslo musí obsahovať aspoň 9 jednotiek. Aby mohlo číslo byť deliteľné piatimi, musí končiť nulou alebo 5. Chceme však, aby bolo deliteľné aj 16, takže musí byť párne a tým pádom končí nulou. Koľko núl na konci musí byť? Jedna nula stačí na deliteľnosť 2, dve nula stačia na deliteľnosť 4, tri na deliteľnosť 8 a štyri na deliteľnosť 16. Tým pádom má číslo tvar 1 111 111 110 000.

Úloha 32

V trojpodlažnom dome žije 42 ľudí nad niekým, 48 ľudí pod niekým. Na prostrednom podlaží býva polovica všetkých osôb v dome. Koľko osôb býva v dome spolu?

Riešenie 32

Označme si počet obyvateľov domu na spodnom podlaží ako S, na prostrednom podlaží ako P a na vrchnom podlaží ako V. Vieme, že 42 ľudí býva nad niekým, 48 pod niekým. Kto býva nad niekým? P a V. Kto býva pod niekým? S a P. Takže vieme, že $P + V + P + S = 42 + 48$, takže $S + 2P + V = 90$. Zároveň vieme, že P tvoria polovicu obyvateľov domu, takže S a V tvoria druhú polovicu. Keďže započítavame P dvakrát, vieme, že 90 sú tri polovice obyvateľov domu, takže v dome býva 60 ľudí.

Úloha 33

Doplňte čísla 1, 2, 3 a 4 (nemusíte použiť každé) do tabuľky tak, aby všetky nápisy v tabuľke boli pravdivé. Pozor, rátajú sa aj čísla, ktoré už sú v tabuľke.

Počet čísel 1 v tejto tabuľke je: ___ .
Počet čísel 2 v tejto tabuľke je: ___ .
Počet čísel 3 v tejto tabuľke je: ___ .
Počet čísel 4 v tejto tabuľke je: ___ .

Aké čísla je možné doplniť do tabuľky? Poznámka: Riešenie zapíš ako jedno 4-ciferné číslo. Keby napríklad bola v každom riadku jednotka, bolo by treba odovzdať 1111.

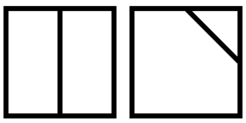
Riešenie 33

Súčet doplnených čísel musí byť rovnaký ako počet všetkých čísel v tabuľke a po doplnení všetkých čísel bude v tabuľke 8 čísel. Takže do tabuľky musíme doplniť čísla so súčtom 8. Číslo 8 vieme rozdeliť na 4 sčítance vybrané spomedzi čísel 1, 2, 3, 4 štyrmi spôsobmi: $8 = 1+1+2+4 = 1+1+3+3 = 1+2+2+3 = 2+2+2+2$.

V prvej možnosti sa vyskytuje číslo 4, takže do niektorého riadku by sme museli doplniť číslo 4. Aby sme splnili vetu v danom riadku, do ostatných riadkov by sme všade museli doplniť jednotky. No potom by súčet doplnených čísel nebol 8. Z tohto vidíme, že štvoricu 1,1,2,4 do tabuľky doplniť nemôžeme. Podobne v štvrtej možnosti by sme do každého riadku museli doplniť číslo 2, no je zrejmé, že v tomto prípade by všetky vety v tabuľke boli nepravdivé. Takže ani štvorica 2,2,2,2 nevyhovuje. Naopak štvorice 1,1,3,3 a 1,2,2,3 vyhovujú obe, keď ich doplníme v poradí 3,1,3,1 a 2,3,2,1.

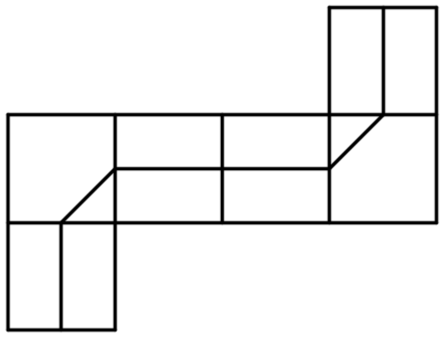
Úloha 34

Alex zdobí plášť kocky s hranou dĺžky 2 cm. Alex každú stenu buď nechá čistú alebo na ňu nakreslí jednu úsečku. Ak Alex nakreslí úsečku, táto úsečka spája stredy dvoch strán – buď protiľahlých (vtedy má úsečka 2 cm) alebo susedných (vtedy má úsečka $\sqrt{2}$ cm), ako na obrázku. Aká je dĺžka najdlhšej neprerušenej čiary, ktorú Alex týmto spôsobom môže nakresliť na kocku? Poznámka: čiara nemusí začínať a končiť na tom istom mieste.



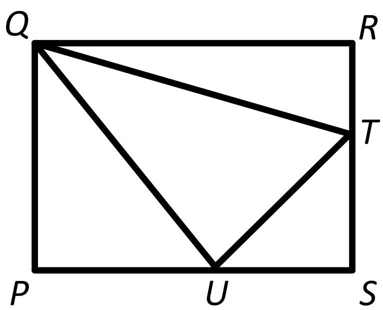
Riešenie 34

Najdlhšia možná čiara, ktorú by Alex mohol nakresliť na kocku by sa skladala zo šiestich „rovných" častí dĺžky 2. Musíme sa však zamyslieť nad tým, či by Alex takúto čiaru vedel nakresliť na kocku ako neprerušenú. Keby sa Alexova neprerušená čiara skladala zo šiestich „rovných častí", mala by maximálne dĺžku 8, pretože štyri rovné čiary by tvorili okruh a zvyšné dve steny by k nim neboli pripojené. Rovnaký dôvod platí aj pre prípad, keby sme použili jednu „šikmú časť" a päť „rovných častí". Tým pádom vieme, že musíme použiť aspoň 2 „šikmé časti", čo sa dá napríklad ako na obrázku. Tým pádom je dĺžka najdlhšej čiary $4 \cdot 2 + 2 \cdot \sqrt{2} \approx 10,83$.



Úloha 35

Majme obdĺžnik *PQRS* ako na obrázku. Obsah trojuholníka *QRT* je 1/5 obsahu *PQRS* a obsah trojuholníka *TSU* je 1/8 obsahu *PQRS*. Akú časť obsahu *PQRS* tvorí obsah trojuholníka *QTU*?



Riešenie 35

Označme si dĺžku strany *QR* *x* a dĺžku strany *RS* *y*. Takže obsah obdĺžnika *PQRS* je *xy*. Obsah trojuholníka *QRT* je $\frac{RT \cdot x}{2} = \frac{xy}{5}$, čo sa dá upraviť na $RT = \frac{2y}{5}$. Teda $TS = RSRT = \frac{3y}{5}$. Obsah trojuholníka *TSU* je $\frac{SU \cdot (\frac{3y}{5})}{2} = \frac{xy}{8}$, čo sa dá upraviť na $SU = \frac{5x}{12}$. Obsah trojuholníka *PUQ* je $\frac{\frac{7xy}{12}}{2} = \frac{7xy}{24}$. Takže obsah trojuholníka *QTU* je $xy(1 - \frac{1}{5} - \frac{1}{8} - \frac{7}{24})$, takže *QTU* tvorí $\frac{xy(1 - \frac{1}{5} - \frac{1}{8} - \frac{7}{24})}{xy} = \frac{23}{60} \approx 0,38$ z obsahu obdĺžnika *PQRS*.

Úloha 36
Majka rada posiela SMS-ky. Každý deň pošle 3 SMS-ky. Zaslanie jednej SMS-ky stojí 10 centov. Majka má na výber tieto prémie:
Po zaslaní spoplatnených 10 SMS-iek môže poslať 1 SMS-ku zadarmo.
Po zaslaní spoplatnených 100 SMS-iek môže poslať 11 SMS-iek zadarmo.
Po zaslaní spoplatnených 1000 SMS-iek môže poslať 111 SMS-iek zadarmo.
Majka si môže vybrať ktorúkoľvek prémiu, ale musí si na ňu našetriť potrebný počet SMS-iek (prémiové SMS-ky sa nepočítajú). Napríklad, keby Majka posielala 122 SMS-iek, mohla by poslať 100 spoplatnených SMS-iek, potom poslať zdarma 11 SMS-iek, potom znova poslať 10 spoplatnených SMS-iek a poslednú SMS-ku poslať zase zadarmo. Koľko najmenej eur zaplatí Majka za poslané SMS-ky za jeden rok (= 365 dní) od prvej odoslanej SMS-ky?

Riešenie 36
Spočítajme si výhodnosť jednotlivých prémií. Prvá má výhodnosť 1/10 (na jednu zadarmo 10 platených), druhá 11/100, tretia 111/1000. Vidíme, že 111/1000 > 11/100 > 1/10, takže tretia prémia je výhodnejšia ako druhá, a druhá je výhodnejšia ako prvá.

Majka za rok pošle $365 \cdot 5 = 1095$ SMS-iek. Majke sa preto nevyplatí využiť tretiu prémiu, pretože by nevyužila 16 SMS-iek zadarmo. Bude sa teda snažiť využiť čo najviac druhých prémií a zvyšok doplniť prvými prémiami.

Takto Majka pošle 111 SMS-iek za cenu 100, potom ďalších 111 za cenu 100, a tak ďalej až po 999 SMS-iek. Týchto 999 SMS-iek ju stálo $900 \cdot 10 = 9000$ centov. Teraz už nemôže využiť druhú prémiu, pretože by nevyužila všetky prémiové SMS-ky. Bude teda využívať prvú prémiu, teda bude posielať 11 SMS za cenu 10. Po týchto prémiách bude mať Majka poslaných 1010, 1021, 1032, 1043, 1054, 1065, 1076 a 1087 SMS-iek. Všetko spolu Majku zatiaľ stálo $900+8\cdot10\cdot10 = 9800$ centov. Musí ale ešte poslať 1095-1087 = 8 SMS-iek, ktoré ju budú stáť 80 centov. Spolu teda zaplatí 9880 centov.

Úloha 37
Do práce sme išli rýchlosťou 40 km/h a z práce rýchlosťou 60 km/h. V oboch smeroch sme prešli rovnako dlhú trasu. Aká bola naša priemerná rýchlosť?

Riešenie 37
Označme dĺžku trasy, ktorú sme prešli v jednom smere s, označme si čas, ktorý zabrala cesta do práce t_1 a čas, ktorý zabrala cesta z práce t_2. Potom platí $40 \cdot t_1 = s = 60 \cdot t_2$, čo môžeme upraviť na $t_1 = \frac{3}{2}t_2$. Priemernú rýchlosť vypočítame ako podiel dĺžky trasy, ktorú sme prešli v oboch smeroch a času, ktorý sme oboma cestami spolu strávili, teda $2s/(t_1 + t_2)$. No keďže $t_1 = \frac{3}{2}t_2$, platí $t_1 + t_2 = \frac{5}{2}t_2$. Tiež vieme, že $s = 60 \cdot t_2$, takže $2s = 120 \cdot t_2$. Takže naša priemerná rýchlosť je $(120 \cdot t_2)/(\frac{5}{2}t_2) = 240/5 = 48$. Naša priemerná rýchlosť bola teda 48 km/h.

Úloha 38
K matematikovi prišiel úradník sčítať ľud. Matematik mu povedal, že má tri dcéry a že súčin ich vekov je 72. Úradník odpovedal, že to mu nestačí. Matematik mu teda ešte povedal, že súčet ich vekov je rovnaký ako číslo domu, v ktorom bývajú. Ani to ešte úradníkovi nestačilo, a tak mu matematik povedal, že jeho najstaršia dcéra sa volá Nimrodel. Koľko rokov má najstaršia matematikova dcéra?

Riešenie 38
Keďže súčin vekov dcér matematika bol 72, veky jeho jednotlivých dcér mohli byť nasledovné: (1,1,72), (1,2,36), (1,3,24), (1,4,18), (1,6,12), (1,8,9), (2,2,18), (2,3,12), (2,4,9), (2,6,6), (3,3,8), (3,4,6).

Z toho ešte nevieme, koľko rokov má najstaršia dcéra. Druhá informácia nám hovorí, že úradník sa dozvedel súčet vekov dcér, ale ani zo súčtu mu to nebolo jasné. Pre každú možnosť si teda musíme vypočítať súčet a pozrieť sa na tie možnosti, ktorých súčet sa vyskytuje aj v nejakej inej možnosti. Také sú len (2,6,6) a (3,3,8) – obe majú súčet 14.

Teraz máme už len dve možnosti a použijeme tretiu informáciu zo zadania, ktorá nám hovorí, že matematik má najstaršiu dcéru. Z toho sa dozvedáme, že matematikova najstaršia dcéra nemá toľko rokov, ako žiadna iná dcéra. Toto vylučuje možnosť (2,6,6) a zisťujeme, že matematikova najstaršia dcéra má 8 rokov.

Úloha 39
Koľko strán mala kniha, ak vieme, že vydavateľstvo použilo na očíslovanie knihy číslicu 6 presne 192-krát?

Riešenie 39
V prvej stovke bola cifra 6 použitá presne 20-krát, a to v číslach: 6, 16, 26, 36, 46, 56, 60, 61, 62, 63, 64, 65, 66 (tu dvakrát), 67, 68, 69, 76, 86, 96. V ďalších stovkách až po 600 bude cifra 6 použitá rovnako často, teda 20-krát na stovku, teda spolu 120-krát. V intervale 600–699 bude cifra 6 použitá v každom čísle strany + klasických 20-krát na stovku, takže spolu 120-krát. Tým pádom hľadané číslo strany bude ležať niekde v intervale 600–69, keďže 120 + 120 > 192.

Pozrime sa na to, koľkokrát bola cifra 6 použitá v intervale 1–659: 120 na prvých šesť stoviek, potom 60+6 = 66-krát na čísla 600–659. Takže cifru šesť sme použili spolu 186-krát. Na interval 1–660 to teda bude 188-krát, na interval 1–661 to bude 190-krát a na interval 1–662 to bude 192-krát. Takže kniha má 662 strán.

Úloha 40
Sára sa vrátila zo školy domov a hneď začala robiť domáce úlohy. V ten deň v škole preberali trojciferné čísla. Tie sa jej zapáčili natoľko, že ich všetky vypísala za sebou bez medzier, takto: 100101102103...998999. Ktorá cifra sa nachádzala na 2015. mieste?

Riešenie 40
Na miestach 1, 4, 7, 10, … (čísla dávajúce zvyšok 1 po delení 3) sa budú nachádzať vždy stovky, na miestach 2, 5, 8, 11, … (čísla dávajúce zvyšok 2 po delení 3) sa budú nachádzať vždy desiatky a na miestach 3, 6, 9, 12, … (čísla dávajúce zvyšok 0 po delení 3) sa budú nachádzať vždy jednotky daných trojciferných čísel. Keďže 2015 dáva po delení troma zvyšok 2, tak na 2015. mieste sa bude nachádzať desiatková cifra jedného z trojciferných čísel.

Teraz sa zamyslime nad tým, ktoré trojciferné číslo tam bude: pre pozície 1–3 je to číslo 100 = 100+3/3–1, pre pozície 4–6 to je číslo 101 = 100+1 = 100+6/31, pre pozície 7–9 je to číslo 102 = 100+2+9/3–1, atď. 2015 spadá do trojice pozícií 2014–2016 takže dostaneme 100 + 2016/3 – 1 = 771. Na desiatkovej pozícii 771 je cifra 7, takže riešením je 7.

Úloha 41
Keď Nevedko prišiel do hodinárstva, našiel v ňom starého hodinára, ktorý opravoval kukučkové hodiny. Hodiny, ktoré starý hodinár práve doopravoval, išli už správne. Iné hodiny sa predbiehali o 12 minút každý deň, tretie sa oneskorovali o 10 minút každý deň. Jedného dňa odbíjali všetky troje hodiny polnoc (t.j. dvanástu hodinu) naraz. O koľko dní (deň má 24 hodín!) budú znova spoločne odbíjať dvanástu hodinu? (hodiny nerozlišujú, či je poludnie alebo polnoc).

Riešenie 41
Aby hodiny opäť všetky spoločne odbíjali 12, musíme nájsť taký deň, kedy sa pomalé hodiny oneskorili o násobok 12 hodín vzhľadom k normálnym hodinám a zároveň sa v ten istý deň rýchle hodiny predbehli o nejaký (iný) násobok 12 hodín.

Pomalé hodiny sa oneskorujú o 10 minút každý deň, takže aby sa oneskorili o 12 hodín, uplynie aspoň $12 \cdot 60/10 = 72$ dní. Rýchle hodiny sa predbiehajú o 12 minút každý deň, takže aby sa predbehli o 12 hodín, uplynie aspoň $12 \cdot 60/12 = 60$ dní. Teraz potrebujeme nájsť najmenší spoločný násobok čísel 72 a 60, pretože v ten deň sa prvýkrát stane, že všetky troje hodiny budú odbíjať 12 naraz.

Najmenší spoločný násobok čísel 60 a 72 je 360. Pozor, tento výsledok ale nie je počet dní, ale počet dvanásťhodinových úsekov, takže počet dní bude $360/2 = 180$.

Úloha 42
V lese stálo 100 stromov, z čoho bolo 99 % smrekov a 1 % borovíc. Horár niekoľko smrekov vyťal, čím zmenil pomer stromov v lese na 98 % smrekov a 2 % borovíc. Koľko smrekov horár vyťal?

Riešenie 42
V lese je 100 stromov, z toho 1 % sú borovice. V lese je teda 1 borovica a 99 smrekov. V prípade, kedy 1 % zodpovedá jednej borovici je v lese 100 stromov. V prípade, kedy 2 % zodpovedajú jednej borovici, v lese musí byť 50 stromov, pretože 1 % je pol stromu a teda 100 % je 50 stromov. Tým pádom smrekov po vyrúbaní musí byť 49, takže bolo treba vyrúbať 50 smrekov.

Úloha 43
Športový tím MARA sa skladá z 1 brankára, 4 obrancov, 4 stredových hráčov a 2 útočníkov. Okrem toho sú v tíme ešte 4 náhradníci: 1 brankár, 1 obranca, 1 stredový hráč a 1 útočník. Každý náhradník môže nahradiť iba hráča rovnakého typu, teda napr. obranca môže nahradiť len obrancu.
Tím môže naraz na ihrisko umiestniť najviac 3 náhradníkov. Ak na ihrisku musí byť z jedného tímu vždy presne 11 hráčov, koľko rôznych zostáv hráčov tímu MARA môže byť na ihrisku?

Riešenie 43
Na chvíľku si predstavme, že tím môže mať na ihrisku naraz hocikoľko náhradníkov (teda nie najviac 3 ale pokojne aj 4). V takomto prípade vyberáme do tímu:
1 brankára z 2 hráčov = 2 možnosti výberu
2 útočníkov z 3 hráčov = 3 možnosti výberu
4 obrancov z 5 hráčov = 5 možností výberu
4 stredových hráčov z 5 hráčov = 5 možností výberu.
Spolu máme teda na výber $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 = 150$ možných tímov.

Teraz si ale znovu spomeňme na to, že tím môže mať na ihrisku naraz najviac 3 náhradníkov. Od našich 150 možných zostáv teda musíme odpočítať počet takých, ktoré používajú 4 náhradníkov. Tímy so štyrmi

náhradníkmi môžeme zostaviť nasledovne. Potrebujeme vybrať:
1 brankára, za ktorého bude hrať náhradník = 1 možnosť výberu
1 útočníka, za ktorého bude hrať náhradník = 2 možnosti výberu
1 obrancu, za ktorého bude hrať náhradník = 4 možnosti výberu
1 stredového hráča, za ktorého bude hrať náhradník = 4 možnosti výberu. Spolu máme teda na výber $1 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 4 = 32$ tímov, kde sú 4 náhradníci. Tímov, v ktorých sú 3 náhradníci alebo menej, je teda $150 - 32 = 118$.

Úloha 44

Robot Borot sa nudí a sčítava dvojciferné čísla nasledujúcim spôsobom: Borot si vyberie dvojciferné číslo *N*. Potom číslu *N* prehodí poradie cifier a vzniknuté číslo sčíta s pôvodným číslom *N*. Ak tento postup Borot zopakuje pre všetky dvojciferné čísla, koľkokrát sa stane, že výsledok sčítania bude štvorec? Pozn.: štvorec je také prirodzené číslo, ktoré sa dá zapísať ako súčin nejakého čísla samého so sebou. Napr. číslo 16 je štvorec, pretože $16 = 4 \cdot 4$.

Riešenie 44

Dvojciferné číslo N sa dá zapísať ako $N = 10a + b$, kde a je jeho prvá cifra a b je jeho druhá cifra. Číslo M, ktoré vznikne prehodením cifier čísla N je potom $M = 10b + a$. Tým pádom súčet pôvodného čísla s číslom s prehodenými ciframi je $N + M = (10a + b) + (10b + a) = 11a + 11b = 11(a + b)$.

Číslo $11(a + b)$ bude druhá mocnina len vtedy, ak $a + b = 11$. Vieme, že a, b sú cifry dvojciferného čísla, takže ich vyberáme z čísel 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 a 9. Tým pádom sú riešenia 2 + 9, 3 + 8, 4 + 7, 5 + 6, 6 + 5, 7 + 4, 8 + 3 a 9 + 2, ktorých je spolu 8.

Úloha 45

Medzi všetkými 5-cifernými číslami, ktorých zápis neobsahuje nulu, nájdite také číslo, pre ktoré je rozdiel samotného čísla a súčinu jeho cifier čo najväčší.

Riešenie 45

Súčin cifier daného čísla by bol maximálny vtedy, keby číslo bolo 99999. Potom by jeho súčin bol 59049, takže rozdiel čísla a jeho ciferného súčinu by bol $99999 - 59049 = 40950$. Teraz sa pozrime, či by sa tento rozdiel nedal nejako zväčšiť. Ak zmenšíme ľubovoľnú cifru, tak tým zmenšíme aj ciferný súčin a aj číslo samotné. Môžeme si vybrať, ktorú cifru zmenšíme, to na ciferný súčin nemá žiadny vplyv. Cifru na mieste jednotiek môžeme zmenšiť na 1, pretože číslo samotné sa tým zmenší o 8, zatiaľčo súčin sa zmenší 9-krát, teda by $59049/9 = 6561$. Potom dostaneme číslo $99991 - 6561 = 93430$, čo je viac než 40950.

Môžeme ešte zmenšiť cifru na mieste desiatok? Ak ju zmenšíme na 1, číslo sa zmenší o 80, ale súčin klesne opäť 9-krát, teda na 729 a dostaneme rozdiel $99911 - 729 = 99182$.

Cifru na mieste stoviek už zmenšiť nemôžeme, pretože číslo by tým kleslo o 100, ale súčin by klesal iba o 81. Rozdiel čísel by teda nenarastal, ale klesal. Zvyšok čísla teda necháme tak ako je a tým dostávame riešenie: 99911.