Vzorová řešení Matboj MatX 2021

matx.p-mat.sk

8. dubna 2021

MINISTERSTVO ŠKOLSTVA, VEDY, VÝSKUMU A ŠPORTU SLOVENSKEJ REPUBLIKY

EURÓPSKA ÚNIA
Európsky sociálny fond
Európsky fond regionálneho rozvoja

OPERAČNÝ PROGRAM ĽUDSKÉ ZDROJE

Tento projekt je realizován díky podpoře z Evropského sociálního fondu a Evropského fondu pro regionální rozvoj v rámci Operačního programu Lidské zdroje. Více informací na www.ludskezdroje.gov.sk, nebo www.minedu.sk.

Úloha 1
Čtyřciferné číslo tvaru ABCD s různými ciframi A, B, C a D jsme zaokrouhlili na stovky a dostali jsme číslo CD00. Jaké největší mohlo být původní číslo ABCD?

Řešení 1
Při zaokrouhlování na stovky se cifra na místě tisíců změní jen pokud jsme zaokrouhlovali nahoru a na místě stovek byla předtím cifra 9. Proto B musí být 9 a po zaokrouhlení bude na místě stovek 0, z čehož tedy víme, že D = 0. Cifra na místě tisíců se musela změnit o 1 a zatím jsme využili cifry 0 a 9. Pokud tedy chceme co největší číslo, vezmeme ze zbylých cifer dvě největší, tedy 7 a 8. Protože cifra na místě tisíců se po zaokrouhlení zvětšila, tak původní číslo muselo začínat cifrou 7, a tedy A = 7. Zůstává už jen C = 8. Původní číslo mohlo být nejvíc 7980.

Úloha 2
Dvacet zvířátek sedí v kruhu a dohadují se o tom, která dvě zvířátka půjdou na průzkum. Každé zvířátko sedí na kameni, přičemž na kamenech jsou v směru hodinových ručiček napsaná čísla 1 až 20. Výběr probíhá tak, že se začne počítat od tygra, který sedí na kameni číslo 1, přičemž každé páté zvířátko je z výběru vyřazeno a odchází pryč. Jako první tak odejdou zvířátka na kamenech s čísly 5, 10, 15 a tak dále. Pokud je už kámen prázdný, nepočítá se – počítají se jen kameny se zvířátky. Slimák s medvědem velmi chtějí jít na průzkum. Na které kameny si mají na začátku sednout, aby zůstali jako poslední dvě zvířátka?

Poznámka: Řešení zadejte jako dvě čísla A a B oddělená čárkou (tedy ve formátu A, B), kde A a B jsou čísla kamenů slimáka a medvěda.

Řešení 2
Nejjednodušší v tomto případě asi není nic počítat, ale celý proces si nasimulovat – napsat si 20 čísel do kruhu a postupně je škrtat v pořadí 5, 10, 15, 20, 6, 12, 18, 4, 13, 1, 9, 19, 11, 3, 17, 16, 2 a 8. Zůstanou místa 7 a 14.
Tato úloha je příkladem takzvaného Josephova problému, který řeší, kde je třeba se postavit při rozpočítávání podle různých pravidel.

Úloha 3
Najděte takové uspořádání přirozených čísel 1–12, aby se v řadě mezi dvěma čísly nikdy nevyskytoval jejich průměr. Například seřazení 1, 2, 4, 8, 3, 12, 11, 9, 10, 7, 5, 6 je nesprávné, protože číslo 2 leží někde mezi čísly 1 a 3. Stačí najít jedno správné seřazení.

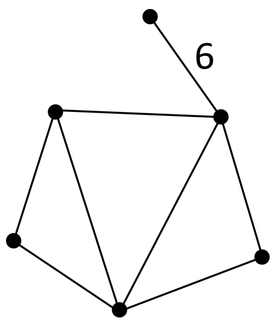
Poznámka: Jako řešení zadejte seznam 12 čísel oddělených čárkami.

Řešení 3
Pokud si napíšeme náhodné uspořádání čísel od 1 do 12, pravděpodobně bude vždy mezi některými dvěma čísly jejich průměr. Je potřeba si tedy vymyslet systém.
Začněme uvažovat nad tím samým příkladem, ale jen s třemi čísly. Uspořádání 1, 2, 3 není dobré, ani 3, 2, 1. Avšak 1, 3, 2 je v pořádku. Teď si ukážeme, jak takové uspořádání čísel převedeme na uspořádání šesti čísel.
První polovina uspořádání šesti čísel bude uspořádání tří čísel, ale každé z nich vynásobíme dvěma (tedy 2, 6, 4). Vynásobení dvojkou vlastnost průměrů nezmění.
Druhá polovina bude dobré uspořádání tří čísel vynásobené dvěma mínus 1 (tedy 1, 5, 3). Toto nám také

vlastnost průměrů nezmění. Zároveň tak vyrobíme lichá čísla, která v první polovině chybí.
Máme tedy uspořádání 2, 6, 4, 1, 5, 3. Určitě víme, že v první polovině vlastnost průměrů neporušíme, ani v druhé polovině ne. A pokud si vybereme jedno číslo z první poloviny (sudé) a druhé z druhé (liché), tak jejich průměr nebude přirozené číslo.
Dostali jsme tak delší uspořádání, které opět splňuje dané podmínky. Teď už tento postup jen zopakujeme na uspořádání 6 čísel, abychom dostali uspořádání 12 čísel: 4, 12, 8, 2, 10, 6, 3, 11, 7, 1, 9, 5.
Nejedná se o jediné možné uspořádání, uznávali jsme samozřejmě všechna možná řešení, kterých je 6128, což je asi 0,0013 procenta ze všech možných uspořádání.

Úloha 4

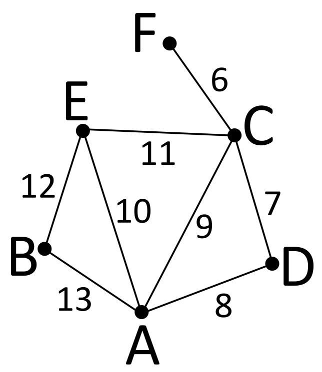
Ondřej objevil mapu sousedních vesnic a cest mezi nimi. K mapě našel i informace o nejkratších trasách mezi jednotlivými vesnicemi (v kilometrech). Nejkratší trasa může procházet i přes jinou vesnici. Na mapě však chybí informace o tom, která vesnice je která... V mapě je zaznačená jen délka jedné cesty. Jaký je součet délek všech cest v okolí (v kilometrech)?



	F	**E**	**D**	**C**	**B**
A	15	10	8	9	13
B	28	12	21	22	
C	6	11	7		
D	13	18			
E	17				

Řešení 4

Správné délky cest a polohy vesnic jsou následující:

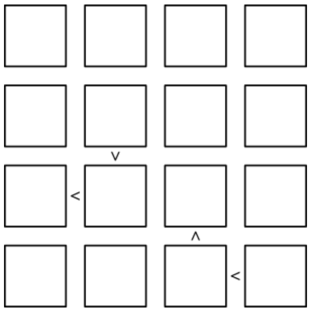


Součet délek cest je tedy 76 km.

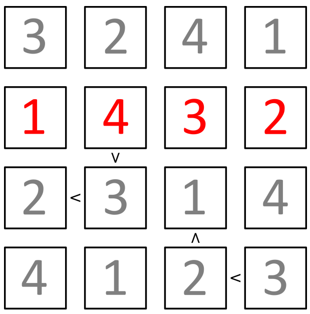
Úloha 5

Vyřešte následující logickou úlohu. V každém políčku se nachází přirozené číslo od 1 do 4, přičemž v každém řádku i sloupci se každé číslo vyskytuje právě jednou. Zároveň musí být zachované naznačené nerovnosti mezi jednotlivými políčky. Jaká čísla se nachází postupně v druhém řádku?

Poznámka: Výsledek zapište jako 4ciferné číslo.



Řešení 5



Úloha 6

Augustin sleduje, na kolikátý pokus mu na kostce padne šestka. Pokud mu šestka padne na první pokus, zapíše si na papír číslo 1 a začne odznova. Pokud mu šestka nepadla na první pokus, pokračuje a hodí znovu. Pokud mu padla šestka nyní, zapíše si na papír číslo 2, protože tentokrát mu šestka padla na druhý pokus a začne odznova. Pokud mu ani napodruhé nepadla šestka, pokračuje třetím pokusem – a tak dále. Pokud mu náhodou ani po 30 hodech nepadne šestka, zapíše si číslo 30 a začne odznova. Které číslo se bude na Augustinově papíru objevovat nejčastěji?

Řešení 6

Pokud si hodněkrát hodíte kostkou, zjistíte, že šestka padne přibližně na každý šestý pokus. To znamená, že přibližně v 1/6 případů (16,67 %) si Augustin zapíše na papír číslo 1. V ostatních 5/6 případů případů pokračuje dále. Co by se muselo stát, aby na papír zapsal dvojku? V prvním hodě NESMÍ hodit šestku, v druhém kole ji hodit MUSÍ. To se stane zhruba v 5/6 × 1/6 případů (13,8 %). Analogicky, aby zapsal trojku, v prvním hodu NESMÍ hodit šestku, v druhém také NESMÍ hodit šestku a v třetím MUSÍ. To se stane asi v 5/6 × 5/6 × 1/6 případů (11,58 %). Vidíme, že každé další číslo má menší a menší šanci – pokud chce napsat číslo N, prvních $N - 1$ hodů musí být neúspěšných (s šancí 5/6) a až poslední hod musí být úspěšný. Limit 30 hodů je v zadání jen proto, aby Augustin nemohl házet neúspěšně donekonečna, ale na řešení úlohy nic nemění.

Úloha 7
Máme dvě 100ciferná čísla. Každé z nich má mezi svými ciframi právě 5 jedniček, zbylé cifry jsou nuly. Tato dvě čísla spolu vynásobíme. Jaký bude ciferný součet tohoto součinu?

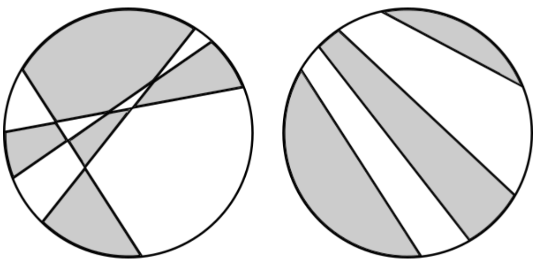
Řešení 7
Představme si, jak bychom tato dvě čísla násobili klasicky pod sebou. Postupně bychom šli po cifrách spodního čísla. Pokud by cifra byla nula, tak bychom nemuseli dělat nic. Pokud by byla jednička, tak na všech pozicích, kde je v prvním čísle jednička, by nám vynásobením vznikla ve výsledku také jednička. Těchto pět čísel, každé s pěti jedničkami, bychom poté sečetli a dostali výsledek.

Ciferný součet výsledku by nám mohlo pokazit, pokud by pro nějakou cifru přešel součet cifer na tomto místě přes 10. Avšak maximální hodnota každé cifry ve výsledném součinu je 5. Tím pádem platí, že ciferný součet bude $5 \times 5 = 25$.

Úloha 8
Jeníček a Mařenka dostali na své narozeniny dva identické okrouhlé dorty. Mařenka svůj dort rozřezala čtyřmi přímými řezy tak, aby dostala co největší počet kousků. Naopak Jeníček dort rozřezal čtyřmi přímými řezy tak, aby dostal co nejmenší počet kousků. O kolik kousků dortu měla Mařenka více než Jeníček?

Poznámka: Všechny řezy byly různé, přímé, svislé, celistvé a vedly přes dort. V úloze proto nehledejte žádné záludnosti.

Řešení 8
Mařenka mohla dort nakrájet na maximálně 11 kousků. Na tohle se dá přijít díky nízkému počtu řezů experimentálně, ale obecně platí, že dobře vedený řez číslo N přidá právě N nových kousků, přičemž jsme začínali s 1 kouskem (celým dortem). Maximum je tedy doopravdy $1 + 1 + 2 + 3 + 4 = 11$. Doporučujeme zjistit si více o takzvané „Lazy caterer's sequence" například na Wikipedii: https://en.wikipedia.org/wiki/Lazy_caterer%27s_sequence.
Jeníček minimalizoval počet kousků tím, že se mu řezy neprotínaly, a tedy jeho počet kousků je 5.
Mařenka měla tedy o 6 kousků víc než Jeníček.



Úloha 9
V soutěži Matboj MatX vyřešil tým „Proti Gustíkovi žádný dišputát" správně 27 úloh. Tým „Hurikán Nina" vyřešil správně dokonce 30 úloh. Tým „Ček it out" vyřešil správně 25 úloh a tým „Kompatsch" správně 24 úloh. Tyto týmy nikdy nevyužily možnost přeskočit úlohu a odpověděly na všech 35 úloh v soutěži. Mohlo se stát, že každou úlohu soutěže aspoň jeden ze zmíněných týmů vyřešil nesprávně?

Řešení 9

Místo toho, aby nás zajímalo, kolik úloh každý tým vyřešil, podívejme se na to, kolik úloh týmy nevyřešily – postupně je to 8, 5, 10 a 11 úloh. Dohromady je to tedy 34 nesprávných odpovědí. Soutěž má celkem 35 úloh, proto aspoň jednu úlohu musely všechny týmy vyřešit správně. Odpověď je tedy NE.

Úloha 10

Na kterém políčku musíte začít svoji cestu, abyste postupně navštívili všechna políčka a skončili na políčku označeným hvězdičkou? Každé políčko obsahuje instrukci o tom, které políčko po něm logicky následuje.

Poznámka: Odpověď zadejte jako souřadnice počátečního políčka, například jako A1.

	1	2	3	4	5	6
A	↓5	→2	←2	↓3	↓1	←1
B	↓1	↓3	↓4	←2	←4	←2
C	↓2	↓1	↑1	→1	←3	←3
D	→2	→4	★	←3	↓1	↑2
E	→2	→4	↑4	↑2	←1	↑2
F	→1	↑5	→3	→1	↑2	↑5

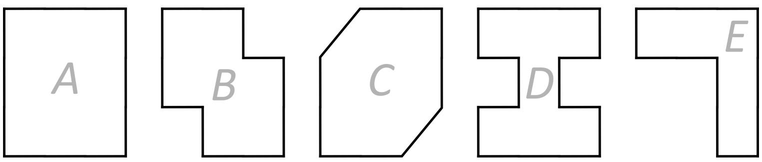
Řešení 10

Pointa tohoto příkladu není v tom ho vyřešit (můžeme jednoduše hledat předcházející políčko cesty až na začátek), ale v tom vyřešit ho efektivně. Zpětné hledání cesty, tzv. backtracking, je v tomto případě velmi pomalá metoda. Mnohem jednodušší je začít na náhodném políčku a jít v směru cesty (v průměru trefíme políčko někde v středu cesty), přičemž navštívená políčka vyškrtáme, protože zjevně na nich cesta nezačíná. Když dojdeme k hvězdičce, zvolíme si opět náhodně nepřeškrtnuté políčko a následujeme pokyny, dokud se nedostaneme k už vyškrtnutému políčku a tak dále. Poslední vyškrtnuté políčko je to, která hledáme. V průměrném případě by nám mělo stačit 4–5 iterací tohoto postupu. Cesta začíná na políčku F4.

Úloha 11

Který z následujících pozemků má nejmenší obvod? A který největší?

Poznámka: Řešení zadejte jako dvě písmena oddělená čárkou (tedy například jako A, B), kde první písmeno označuje pozemek s nejmenším obvodem a druhé pozemek s největším obvodem.



Řešení 11

Pokud z obdélníku (A) vyřežeme z rohu jeden čtverec či obdélník (= útvar E), nebo dva čtverce nebo obdélníky (= útvar B), obvod útvaru se nezmění – jednu hranu jen nahradíme hranou stejné délky. Avšak pokud vyřežeme čtverce nebo obdélníky ze středu strany (= útvar D), nahradíme jednu hranu třemi dalšími. Útvar D tedy má větší obvod než útvar A. Naproti tomu útvar se zkosenými rohy (C) má obvod menší než A kvůli trojúhelníkové nerovnosti (dvě strany trojúhelníku jsme nahradili třetí, která musí být kratší než součet zbylých dvou).

Úloha 12

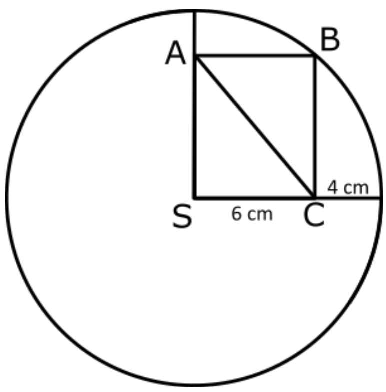
Mařenka ukládá barevné kamínky do řady. Má 4 křemeny, 8 achátů a 7 malachitů. Její podmínkou je, aby křemen byl vždy mezi achátem a malachitem. Rovněž achát a malachit nesmějí být v řadě vedle sebe. Kolika různými způsoby dovede kamínky seřadit?

Řešení 12

Křemen určitě nemůže být na okraji a zároveň musí oddělovat acháty od malachitů. Protože křemenů je sudý počet, na začátku a na konci musí být stejný typ kamene. Takže jediné posloupnosti kamínků, které připadají do úvahy jsou:
Několik achátů – 1 křemen – několik malachitů – 1 křemen ... – několik achátů
Několik malachitů – 1 křemen – několik malachitů – 1 křemen ... – několik malachitů
Pokud jsou na začátku i na konci acháty, máme dohromady 3 skupiny achátů (kterých je dohromady 8) a 2 skupiny malachitů (kterých je dohromady 7), například AAKMMKAAAKMMMMMKAAA. 8 achátů je možné do tří neprázdných skupin rozdělit 21 způsoby, 7 malachitů do dvou neprázdných skupin 6 způsoby. Dohromady to dává 21 × 6 = 126 posloupností kamínků, pokud začínáme achátem. Pokud si podobnou úvahu uděláme pro posloupnosti začínající malachitem, dostaneme dalších 105 možností. Dohromady tedy 126 + 105 = 231 možností.

Úloha 13

Do kružnice se středem *S* je vepsaný obdélník *SABC* jako na obrázku. Jaká je délka úhlopříčky *AC* (v cm)?



Řešení 13

Pokud bychom chtěli vypočítat délku úhlopříčky *AC* přímo, asi by nám to zabralo dost času a vyžadovalo by to použití několika Pythagorových vět. Proto je vhodné se podívat na příklad jinak. Úhlopříčka *AC* má stejnou délku jako úhlopříčka *SB*. Úhlopříčka *SB* je ale zároveň poloměrem kružnice. A poloměr známe – je to součet dvou délek ze zadání, tedy 10 cm.

Úloha 14

Posloupnost čísel vytvoříme následovně: Napřed si vybereme počátečního člena posloupnosti – přirozené číslo větší než 0. Poté do posloupnosti přidáváme další členy podle těchto pravidel:

1. Pokud je poslední člen posloupnosti sudé číslo, další člen posloupnosti bude jeho polovina.
2. Pokud je poslední člen posloupnosti liché číslo a jeho první cifra je sudá, další člen posloupnosti bude poslední člen zapsaný pozpátku.
3. Pokud je poslední člen posloupnosti liché číslo a jeho první cifra je lichá, další člen posloupnosti bude číslo o 10 větší.

Tento postup opakujeme. Příkladem takové posloupnosti je například 51, 61, 16, 8, 4, ... Které nejmenší číslo si můžeme na začátku zvolit, aby posloupnost nikdy neobsahovala číslo 1?

Řešení 14

Toto je jedna z úloh, jejíž řešení je přiměřeně malé na to, aby se dalo najít zkoušením. Dá se sice najít i přímo použitím rovnic, ale předpokládáme, že většina týmů použila metodu pokus-omyl. Důležité je proto zkoušet smysluplně, nabízí se nám dvě pravidla:

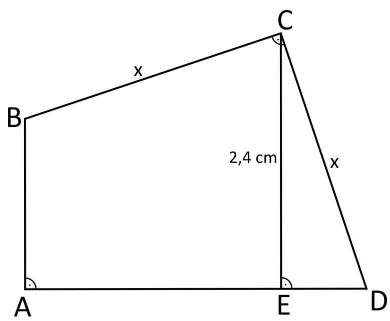
- Zkoušet sudá čísla je zbytečné. Pokud by toto sudé číslo nikdy nevedlo na číslo 1, dá se to samé říct i o jeho polovině. Tato polovina je určitě menší a byla by tedy lepším kandidátem na počáteční řešení úlohy.
- Pokud se v posloupnosti pro počáteční N dostaneme na číslo, které jsme už jako kandidáta vyškrtli, můžeme vyloučit i N.

Jednociferná čísla umíme vyloučit jako řešení poměrně rychle a posloupnosti začínající dvojciferným číslem vedou rychle k číslům jednociferným. To však neplatí pro číslo 37, které vede na 47, které vede na 74, které vede zpátky na 37. Zacyklili jsme se, proto se na číslo 1 nikdy nedostaneme. Číslo, které tedy hledáme, je 37.

Úloha 15

ABCD je konvexní čtyřúhelník (to znamená, že všechny jeho vnitřní úhly jsou menší než 180°). Na straně *AD* leží bod *E*. Zároveň také platí, že $|BC| = |CD|$ a také, že $|CE| = 2{,}4$ cm. Úhly *DCB*, *DAB* a *CEA* jsou pravé. Jaká je plocha čtyřúhelníka *ABCD* v cm^2?

Poznámka: Pokud je třeba, výsledek zaokrouhlete na 2 desetinná místa.

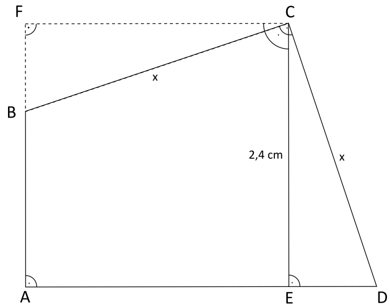


Řešení 15

Na prvním obrázku vidíme nakreslené zadání úlohy.

Pokud si dokreslíme útvar *CEAB* na obdélník *CEAF*, tak si můžeme všimnout, že trojúhelníky *CED* a *CFB* jsou shodné. Proč tomu tak je?

Za prvé víme, že délky $|BC|$ a $|CD|$ jsou stejné. Za druhé úhly *BCF* a *ECD* mají stejnou velikost, protože úhly *BCD* i *ECF* jsou pravé. A protože úhly *BFC* i *CED* jsou pravé, tak i velikosti úhlů *FBC* a *CDE* jsou stejné. Podle věty úhel-strana-úhel jsou tedy trojúhelníky *CED* a *CFB* shodné. Tím pádem mají i stejný obsah. Také ale platí, že $|CE| = |CF|$. *CEAF* je teda ve skutečnosti čtverec.
Stačí nám tedy najít obsah čtverce *CEAF*. To je už jednoduché, protože jeho stranu víme, je to 2,4 cm. Obsah tedy je 5,76 cm^2.



Úloha 16
Usain a Asafa se dostali do olympijského finále v běhu na 100 metrů, ve kterém bude běžet celkově 8 běžců. Kolik je různých pořadí v cíli tak, že Usain bude ve výsledcích před Asafou?

Poznámka: Předpokládáme, že žádní dva běžci nedosáhli stejného času.

Řešení 16
Kolik je všech různých pořadí? Na prvním místě si můžeme vybrat z 8 běžců, na druhém ze sedmi a tak dále. Všech možných pořadí tedy je $8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 40320$. Finta spočívá v tom, uvědomit si, že pro které pořadí, kde je Asafa před Usainem, existuje právě jedno pořadí, kde je Usain před Asafem – jednoduše přehodíme jejich pozice. Proto pořadí, v kterých je Usain před Asafem je přesně polovina z celkového počtu, tedy 20160.

Poznámka: Uznávali jsme i odpověď $(8 \times 7)/2 = 28$, která nehledí na pořadí ostatních běžců.

Úloha 17
Stanka si na papír napsala trojciferné číslo. Za něho napsala to samé číslo znova a dostala tak 6ciferné číslo. Jaký je nejmenší možný počet dělitelů (včetně 1 a čísla samotného), které takto vyrobené 6ciferné číslo může mít?

Řešení 17
Stanka dostala číslo v tvaru *ABCABC*. To ale můžeme zapsat jako *ABC*000 + *ABC*, tedy 1000 × *ABC* + *ABC* = 1001 × *ABC*. Minimální počet dělitelů Stančina čísla nastane v případě, že *ABC* je prvočíslo. 1001 sa dá rozložit na součin $7 \times 11 \times 13$. Prvočísla v rozkladu čísla *ABCABC* tedy jsou 7, 11, 13 a *ABC*. Z těchto prvočísel umíme vyskládat přesně $2^4 = 16$ různých dělitelů Stančina čísla.

Úloha 18

Na shromáždění přišlo 100 šamanů. Každý z nich je buď šťastný, nebo smutný. Máme k dispozici následující informace:

1. Aspoň jeden z přítomných šamanů je smutný.
2. Z libovolné dvojice šamanů je aspoň jeden šťastný.

Kolik je na shromáždění šťastných šamanů?

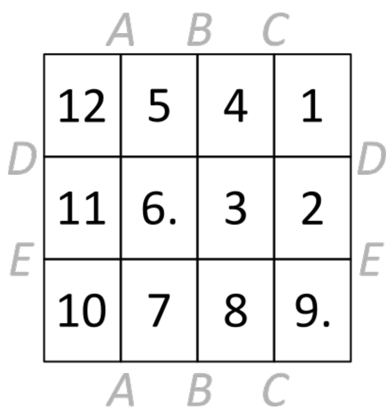
Řešení 18

„V každé dvojici je aspoň jeden šťastný šaman“ je to samé jako „v žádné dvojici nejsou oba smutní šamani“. Pokud by smutní šamani byli aspoň dva, nutně vytvoří aspoň jednu dvojici, kde jsou oba šamani smutní – to ale není možné. Smutných šamanů je tedy méně než 2. Protože víme, že je aspoň jeden, musí to bý právě jeden. Z toho plyne, že šťastných šamanů je 99.

Úloha 19

Ivan si koupil papírovou mapu, rozložil ji, ale nepamatuje si, v jakém pořadí ji má poskládat zpátky. V jakém pořadí musí vykonat skládání podél přehybů A, B, C, D a E, aby v poskládané mapě dostal očíslované části shora dolů přesně v pořadí od 1 po 12? Číslo platí pro obě strany mapy.

Poznámka: Jako odpověď zadejte posloupnost přehybů (například EBADC), směr přehybu nemusíte uvádět.



Řešení 19

První přehyb musí být podél D, abychom dostali část 2 na část 1. Další přehyb musí být podél C, abychom dostali část 3 na část 2. Část 4 už je na svém místě, proto další přehyb (podél B) musí dostat část 5 na část 4. Část 6 je už na správném místě a část 7 dostaneme na část 6 pomocí přehybu podél E. Tento přehyb dostane na správné místo i části 8 a 9. Poslední přehyb podél A už dostane části 10, 11 a 12 na svá místa.

Úloha 20

Součin dvaceti pěti celých čísel je 1. Jaká může být nejmenší hodnota součtu těchto čísel?

Řešení 20

Pokud by se mezi čísly nacházela nula, součin by byl nula, což se vylučuje se zadáním. Pokud by libovolné číslo bylo (v absolutní hodnotě) alespoň 2, tak by i součin všech čísel byl (v absolutní hodnotě) alespoň 2.

Takže mezi čísly jsou jen čísla 1 a −1. Protože nás zajímá co nejmenší hodnota součtu, chceme co nejvíc čísel −1. To nastane tehdy, pokud máme 24 čísel −1 a jednu kladnou jedničku. Součet těchto čísel je −23.

Úloha 21

Každé číslo má svůj „otisk". Ten vypočítáme tak, že první cifru vynásobíme jedničkou, k tomu přičteme druhou cifru vynásobenou dvojkou, třetí cifru vynásobenou trojkou a tak dále, dokud nám nedojdou cifry. Například otisk čísla 23507 je $2 \times 1 + 3 \times 2 + 5 \times 3 + 0 \times 4 + 7 \times 5 = 58$. Které je nejmenší přirozené číslo s otiskem rovným 100?

Řešení 21

Zjistěme, kolik musí mít hledané číslo cifer. Pokud by mělo jen jednu cifru, tak by jeho maximální otisk mohl být $9 \times 1 = 9$. To je očividně příliš málo. Kdyby mělo 2 cifry, tak by jeho maximální otisk mohl být $9 \times 1 + 9 \times 2 = 27$. Stále příliš málo. Pro 3 cifry: $9 \times 1 + 9 \times 2 + 9 \times 3 = 54$. Stále příliš málo. Pro 4 cifry: $9 \times 1 + 9 \times 2 + 9 \times 3 + 9 \times 4 = 90$. Stále příliš málo. Pro 5 cifer: $9 \times 1 + 9 \times 2 + 9 \times 3 + 9 \times 4 + 9 \times 5 = 135$. Pěticiferné číslo by tedy mělo stačit. Nyní potřebujeme, aby byl otisk přesně 100.

Aby bylo hledané číslo co nejmenší, potřebujeme snižovat hodnoty cifer zleva doprava. První cifru můžeme zmenšit nejméně na 1, otisk čísla je poté $1 \times 1 + 9 \times 2 + 9 \times 3 + 9 \times 4 + 9 \times 5 = 127$. Druhou cifru můžeme zmenšit na 0. Potom je otisk $1 \times 1 + 0 \times 2 + 9 \times 3 + 9 \times 4 + 9 \times 5 = 109$. Třetí cifru tím pádem můžeme zmenšit ještě o 3, tedy výsledné číslo je 10699.

Úloha 22

Tatínek chce svým paterčatům udělat na narozeniny radost dobrým zákuskem, každému dítěti jedním. Už se ale naučil, že se děti pohádají, pokud nedostanou buď každé stejný, nebo každé úplně jiný zákusek. Šel tedy do cukrárny, kde měli aspoň pět druhů zákusků. Všechny vypadaly dobře, a tak řekl prodavačce, ať mu *náhodně* vybere X zákusků. Jaká musí být nejmenší možná hodnota X, aby nezpůsobil hádku?

Poznámka: Všechny zbylé zákusky sní tatínek spolu s maminkou, i oni si přece zaslouží něco dobrého.

Řešení 22

Připomeňme si, že cílem je, aby paterčata měla buď všechna stejný zákusek, nebo všechna úplně různé zákusky. Označme si typy zákusků A, B, C, D a E. 16 náhodně vybraných zákusků stačit nemusí, protože prodavačka mohla vybrat 4 zákusky A, 4 B, 4 C a 4 D. Tento výběr neumíme rozdělit mezi paterčata tak, aby byla spokojená. Sedmnáctý zákusek ale už nutně bude buď pátý zákusek daného typu (a paterčata dostanou všechna stejný zákusek), nebo první zákusek typu E (a v tom případě dostane každé paterče jiný zákusek). A rodiče budou šťastní, protože jim zbude $17 - 5 = 12$ zákusků.

Úloha 23

Pepíkovi nabídli na pohovoru dvě možnosti vyplácení platu. Možnost A je, že mu první rok zaplatí 4000 eur a každý další rok mu zvýší plat o 800 eur. Možnost B je, že mu za první půlrok zaplatí 2000 eur a každých 6 měsíců mu zvýší plat o 200 eur. Která z možností je pro Pepíka výhodnější za předpokladu, že bude pracovat aspoň rok?

Řešení 23

Vypočítejme si, kolik by Pepík vydělal v obou případech. Výdělky za jednotlivé roky budeme dávat do závorek. Při možnosti A by vydělal (4000) + (4800) + (5600) + (6400) + ... Při možnosti B by vydělal (2000 + 2200) + (2400 + 2600) + (2800 + 3000) + (3200 + 3400) + ... = (4200) + (5000) + (5800) + (6600) + ...

Vidíme tedy, že pokud by pracoval méně než půl roku, tak by možnost A i B byly nastejno. Jakmile by však pracoval déle, byla by pro něho výhodnější možnost B.

Úloha 24

Číslo Č se dá zapsat jako součet sedmi bezprostředně po sobě jdoucích přirozených čísel, ale také jako součet osmi bezprostředně po sobě jdoucích přirozených čísel. Jaké může být nejmenší možné číslo Č?

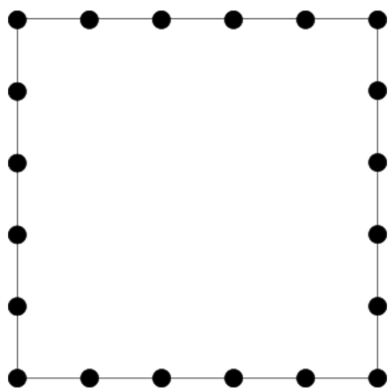
Poznámka: Nulu nepovažujeme za přirozené číslo.

Řešení 24

Součet sedmi po sobě jdoucích čísel zapíšeme jako $k + (k + 1) + (k + 2) + (k + 3) + (k + 4) + (k + 5) + (k + 6) = 7 \times k + 21 = 7 \times (k + 3)$. Hledané číslo je tedy dělitelné sedmi.
Součet osmi po sobě jdoucích čísel zapíšeme jako $n+(n+1)+(n+2)+(n+3)+(n+4)+(n+5)+(n+6)+(n+7) = 8 \times n + 28 = 4 \times (2n + 7)$.
Hledané číslo je tedy násobkem čísla 28 (ale ne 56, protože v druhé rovnici jsme nemohli vyjmout před závorku 8, ale jen 4). Samotné číslo 28 není součtem osmi po sobě jdoucích přirozených čísel, 56 není kandidát, ale další číslo v pořadí, 84, už obě podmínky splňuje (najít jednotlivé sčítance necháváme jako úlohu pro čtenáře).

Úloha 25

Mějme čtverec se stranou 5 cm. Na každé jeho straně je 6 bodů s pravidelnými rozestupy 1 cm. Kolik existuje různých úseček, které začínají v jednom z těchto bodů a končí v jiném z těchto bodů, které mají délku 5 cm?



Řešení 25

Vodorovných úseček je 6. Svislých úseček je také 6. Poté ale nesmíme zapomenout ještě na 8 šikmých úseček, kde vždy dvě začínají na jedné straně a končí na sousední straně. Ty mají délku 5 cm z Pythagorovy věty, protože $3^2 + 4^2 = 5^2$. Celkem je tedy 6 + 6 + 8 = 20 úseček.

Úloha 26

Kladná přirozená čísla menší než 1000 jsme rozdělili na tři skupiny:

1. Sudá čísla složená jen ze sudých cifer.
2. Lichá čísla složená jen z lichých cifer.
3. Všechna ostatní čísla.

Jaká je absolutní hodnota rozdílu počtů čísel v první a druhé skupině?
Poznámka: Cifra 0 je sudá.

Řešení 26

Pro jednociferná čísla je úloha jednoduchá – máme 5 lichých a 4 sudá čísla.
Dvojciferná čísla jen z lichých cifer můžou mít na prvním místě 5 cifer (1, 3, 5, 7, 9) a na druhém taky, je jich tedy 25. Sudá dvojciferná čísla ze sudých cifer můžou mít na prvním místě 4 různé cifry (2, 4, 6, 8) a na druhém 5 (přibude ještě 0). To je dohromady 20 čísel.
Podobně trojciferných lichých čísel s lichými ciframi je $5 \times 5 \times 5 = 125$ a sudých se sudými ciframi $4 \times 5 \times 5 = 100$. Rozdíl počtů v daných skupinách tedy je $125 + 25 + 5 - 100 - 20 - 4 = 31$.

Úloha 27

Péťa potřebuje rozměnit 100eurovou bankovku, kterou mu vydal bankomat. Chce ji rozměnit na drobné, přičemž k dispozici jsou 50, 20, 10 a 5eurové bankovky. Kolika různými způsoby si dovede 100eurovou bankovku rozměnit?

Řešení 27

Využijme toho, že 5 je dělitelem čísel 10, 20, 50 i 100. To znamená, že ať použijeme libovolný počet jiných bankovek, zbytek do stovky budeme vždy schopní vyplatit 5eurovkami (počet 5eurovek ani nepotřebujeme dopočítávat, stačí říct „použijeme jich tolik, kolik jich je třeba“).
Teď nám stačí už jen vymyslet systém vypisování možností. Dobrý systém je, kde si vypisujeme počty tak, že množství největších bankovek postupně klesá (2×50, $50 + 2 \times 20 + 10$, $50 + 2 \times 20$, $50 + 20 + 3 \times 10$, $50 + 20 + 2 \times 10$, ...). Nezapomeňme, že počet 5eurovek je daný doplatkem do 100 a můžeme ho ignorovat, protože je jednoznačně určený zbylými bankovkami. Tímto systémem jsme schopni zjistit, že počet řešení je 49.

Úloha 28

Na počátku bylo přirozené číslo. Vzali jsme jeho cifry, každou z nich jsme umocnili na druhou (vynásobili samu sebou), mezivýsledky jsme sečetli a ještě přičetli 1 – a s velkým překvapením jsme dostali původní číslo. Najděte největší takové přirozené číslo.

Příklad: Číslo 24 není řešením, protože $2 \times 2 + 4 \times 4 + 1 = 21 \neq 24$.

Řešení 28

Číslo určitě nebylo čtyřciferné, protože součet druhých mocnin cifer plus 1 je nejvíce $4 \times 9 \times 9 + 1 = 325$.
Pro čísla s větším počtem cifer je problém ještě horší.
Mohlo být číslo trojciferné? Maximální hodnotu dosáhneme pro číslo 999, kde je výsledek $3 \times 9 \times 9 + 1 =$

244. To je sice málo, ale už je to trojciferné číslo – na místě stovek má však 2. To znamená, že původní číslo muselo mít na místě stovek také nejvíce cifru o hodnotě 2. Udělejme velkorysý horní odhad a řekněme, že číslo je maximálně 299. Pokud vypočítáme hodnotu z něho, dostaneme $2 \times 2 + 2 \times 9 \times 9 + 1 = 167$. To je stále méně než původní číslo. Tímto jsme číslo opět omezili a původní číslo je tedy nejvíc 167. Zde je už vidět, že trojciferné číslo s největším výsledkem je 159, které dává výsledek $1 \times 1 + 5 \times 5 + 9 \times 9 + 1 = 108$. Tím jsme opět omezili naše trojciferné číslo na maximálně 108. A už vidíme, že žádné z těchto čísel trojciferný výsledek nedává. Tento odstavec měl za úkol metodou postupného zmenšování ukázat, že i trojciferná čísla jsou mimo hru.

Pro dvojciferná čísla organizátoři nenašli jiný, pro řešitele na druhém stupni přívětivý, způsob řešení, než odzkoušet všechny možnosti od 100 níže. Největší takové číslo je 75.

Úloha 29

Máme nekonečnou čtverečkovou síť. Na začátku je v jednom políčku číslo 1, v ostatních jsou nuly. Každou sekundu se číslo v každém políčku nahradí součtem čtyřech sousedních políček. Jaký bude součet všech čísel v čtverečkové síti po 10 sekundách?

Řešení 29

Podívejme se na konkrétní políčko v libovolném čase. Co se stane o sekundu později? Hodnota tohoto políčka se dostane do čtyř sousedních políček (jako součást celkového součtu v sousedních políčkách). Zároveň z tohoto políčka zmizí, protože hodnota políčka nemá vliv na jeho hodnotu o sekundu později (do políčka se dostane součet sousedních čtyř políček). To se stane pro každé políčko. Z toho nám vychází jediné – každou sekundu se součet všech políček v síti zčtyřnásobí. Na začátku je součet 1, po 10 sekundách je tedy jejich součet $4^{10} = 1048576$.

Úloha 30

Máme číslo, které neobsahuje cifru 0. Přičteme k němu stejné číslo, ale napsané pozpátku. Tímto nám vznikne trojciferné číslo, které se skládá jen z cifer 6 a 9 (ve výsledném čísle nemusí být nutně obě tyto cifry). Kolik různých čísel jsme mohli mít na začátku?

Řešení 30

Původní číslo muselo být určitě trojciferné, protože z dvojciferných čísel umíme dostat maximálně číslo $99 + 99 = 198$ a nejmenší možné trojciferné číslo složené jen z cifer 6 a 9 je 666. První a třetí cifra výsledku musí být stejná – sčítáme vždy stejné cifry z původního čísla a k přechodu přes desítku nemohlo dojít, protože ten přidá při sčítání maximálně 1, ale cifry 6 a 9 jsou od sebe dále než 1. To znamená, že výsledek mohou být jen čísla 666, 969, 696 a 999.

Pokud je druhá cifra výsledku 6, tak nemohlo nikde dojít k přechodu přes desítku. Na získání druhé cifry totiž potřebujeme dvakrát tu samou, střední, cifru původního čísla a dostaneme sudé číslo. Přechod přes desítku by nám ještě přidal 1, což nechceme. Z toho je už zřejmé, že střední cifra původního čísla je 3 a součet první a poslední je menší než 10 (6 v případě výsledku 666 a 9 v případě výsledku 969, součet nemohl být 16 ani 19). To nám dává následující možnosti. Pro 666 bylo původní číslo 135, 234, 333, 432, nebo 531. Pro 969 bylo původní číslo 138, 237, 336, 435, 534, 633, 732, nebo 831. Dohromady 13 možností.

Pokud je druhá cifra výsledku 9, tak naopak k přechodu přes desítku muselo dojít, protože 9 je liché číslo. To ale znamená, že součet první a třetí cifry musel být 16 nebo 19. Při výpočtu stovek ve výsledku bychom tak přenesli jedničku až do tisíců, což by vytvořilo čtyřciferné číslo, které nechceme. Další možnosti tak do seznamu již nepřidáme.

Úloha 31
Michal má dřevěnou kostku se stranou 30 cm, kterou chce rovnými řezy pilou rozřezat na 27 kostiček se stranou 10 cm. Mezi řezy může jednotlivé části libovolně přeskládat. Jaký je nejmenší počet řezů, který musí Michal udělat, aby kostku rozřezal?

Řešení 31
To, že Michal může části mezi jednotlivými řezy přeuspořádat je sice pěkné, ale ničemu to nepomůže. Zaměřme se totiž na středovou kostičku. Při každém řezu od této středové kostičky odřežeme nejvíce jednu jinou kostičku, která s ní sousedí (jinak by řez nemohl být rovný). To ale znamená, že řezů je třeba alespoň 6, protože středová kostička má 6 sousedů. A na 6 řezů to jde jednoduše, části mezi jednotlivými řezy není třeba ani přeskládávat.

Úloha 32
Kolik je takových trojciferných čísel, v kterých je cifra na místě stovek větší než cifra na místě jednotek a cifra na místě desítek větší než cifra na místě stovek?

Řešení 32
Cifra na místě stovek není nejmenší, a proto rozhodně nemůže být 0. Tento okrajový případ tedy vůbec nemusíme řešit.
Pokud z cifer od 0 po 9 vybereme tři různé, umíme z nich jednoznačně vyskládat číslo splňující podmínku zadání.
Proto počet takových trojciferných čísel je stejný jako počet možností jak vybrat 3 různé cifry z deseti možných. První cifru můžeme vybrat z deseti možností, druhou už jen z devíti a třetí už jen z osmi. Nesmíme však zapomenout na to, že postupný výběr A, B, C je to samé jako výběr A, C, B, nebo B, A, C, nebo B, C, A, nebo C, A, B, nebo C, B, A. Celkový počet $10 \times 9 \times 8$ ještě tedy musíme vydělit šesti, čímž dostaneme 120 možností.

Úloha 33
Lenka se obvykle vrací z práce vlakem a na nádraží ji v pět vyzvedne Dan, který ji odveze domů. Jednoho dne ale skončila v práci dřív a podařilo se jí stihnout stejný, ale o hodinu dřívější vlak. Vybil se jí telefon, a tak o tom Danovi nemohla napsat. Ten den bylo pěkné počasí, tak se Lenka rozhodla jít Danovi pěšky naproti a když ho potkala, nasedla do auta a jeli domů. Domů dorazili o 10 minut dřív než obvykle. Kolik minut šla Lenka pěšky?

Řešení 33
Podívejme se na situaci ne z pohledu Lenky, ale z pohledu Dana. Ten se také domů vrátí o 10 minut dřív než obvykle. To znamená, že na té části cesty od místa, kde vyzvedl Lenku po nádraží a zpátky, kterou nemusel absolvovat, ušetřil 10 minut. Teda jedním směrem ušetřil 5 minut. To znamená, že Lenku nabral do auta 5 minut před tím, než za normálního dne. Takže Lenka musela jít pěšky 60 minut (doba, o kterou přijela dřív než obvykle) – 5 minut (ušetřený čas), tedy 55 minut.
Všimněte si, že při řešení úlohy nepotřebujeme znát rychlosti Dana a Lenky, a ani dokonce nepotřebujeme předpokládat, že by se oba pohybovali rovnoměrnou rychlostí.

Úloha 34

Kolik je různých kladných přirozených čísel k takových, že součet $1! + 2! + 3! + ... + k!$ je druhou mocninou přirozeného čísla?

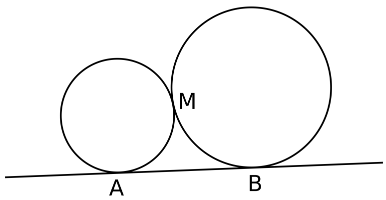
Poznámka: Faktoriál přirozeného čísla n (zapisujeme $n!$) vypočítáme jako součin všech přirozených čísel od 1 po n, t.j. $1 \times 2 \times 3 \times ... \times n$.

Řešení 34

Vypišme si prvních pár hodnot a zaměřme se na poslední cifru výsledného čísla. Pro $n = 1$ máme výstup $1! = 1$ (řešení), pro $n = 2$ máme výstup $2! + 1! = 2 \times 1 + 1 = 3$. Pro $n = 3$ máme výstup $3! + 2! + 1! = 3 \times 2 \times 1 + 2 \times 1 + 1 = 9$ (řešení). Pro $n = 4$ máme výstup $4! + 3! + 2! + 1! = 33$. Pro $n = 5$ máme výstup $5! + 4! + 3! + 2! + 1! = 153$. Všimněme si, že člen $5!$ je dělitelný desíti (má v rozkladu číslo 5 i číslo 2), a proto nemění poslední cifru v porovnání s předcházejícím členem. To samé však platí pro všechny další faktoriály (větší než 5) – vždy budou dělitelné desíti, a proto budou končit nulou a poslední cifru součtu nezmění. Pro $n \geq 5$ je teda poslední cifra součtu vždy 3. No a druhá mocnina přirozeného čísla nikdy nekončí cifrou 3 (poslední cifry jsou 1, 4, 9, 6, 5, 6, 9, 4, 1, 0, a tato sekvence se stále opakuje). Proto jediné dvě řešení jsou ta, která jsme našli na začátku ($n = 1$ a $n = 3$).

Úloha 35

Na přímce máme dva body A a B. Nakreslíme dvě kružnice tak, aby se první kružnice dotýkala přímky v bodě A, druhá se dotýkala přímky v bodě B a zároveň se obě kružnice dotýkaly v bodě M. Kdybychom si nakreslili body M pro všechny možné dvojice kružnic, které splňují zadání, na jakém útvaru by tyto body ležely? A) na přímce, B) na obvodu čtverce, C) na kružnici, nebo D) na obvodu trojúhelníku?



Řešení 35

Do obrázku si dokreslíme společnou tečnu obou kružnic. Ta protne přímku AB v bodě S. Vzdálenost $|SA|$ je stejná jako $|SM|$, protože přímky SA a SM jsou tečnami vedenými ze stejného k první kružnici. Podobně platí i $|SM| = |SB|$. S je teda středem úsečky AB. Zároveň, nechť je bod M kdekoliv, délka $|SM|$ je polovinou délky $|AB|$, a tedy konstantní. Takže ještě jednou – body A a B jsou dané, tedy i bod S je daný. Bod M se sice může hýbat, ale víme, že vzdálenost $|SM|$ je konstantní. Je tedy poloměrem a všechny možné body M leží na kružnici.